

R 语言在《运筹学》教学中的应用

——以线性规划的教学为例

胡勋锋

广西大学工商管理学院 广西 南宁 530004

【摘要】：本文在分析运筹学教学现状与 R 语言应用优势的基础上，以线性规划一章的经典习题为主体材料，设计了基于 R 语言的单纯形法与灵敏度分析教学案例：利用矩阵运算构造并迭代单纯形表求解线性规划，再结合影子价格、目标函数系数变化、资源右端项变化与新产品投产等情境开展灵敏度分析。

【关键词】：R 语言；运筹学；教学改革；单纯形法；灵敏度分析

DOI:10.12417/2705-1358.26.15.080

引言

随着大数据与人工智能技术的全面渗透和飞速发展，社会各领域对定量分析与科学决策的要求不断提升，以数据为核心驱动的优化决策需求正在各行各业日益凸显。作为高校经管类和理工类专业培养学生定量决策能力的核心课程，运筹学传统教学模式已经难以适应新时代人才培养的要求，迫切需要通过引入功能强大的现代计算工具来优化教学流程、改进教学效果。

目前国内高校运筹学日常教学中，常用的教学演示与模型求解软件主要有 Excel、Lingo、Matlab、Mathematica 等，但这些主流软件都存在一定的局限性：部分商用软件需要向使用者收取高昂的商业授权费用，普通学生难以在个人设备上长期使用；部分软件对可求解问题的变量规模、约束规模存在明确限制，无法支撑学生处理和真实生产生活场景相符的大规模问题，这些缺陷都十分不利于学生开展课后自主练习，也不利于培养学生面向真实规模复杂问题的应用能力^[1-2]。

相比之下，R 语言是一款完全免费、开放源代码、支持全平台运行的统计计算与优化求解平台，本身还具备语法简洁易懂、扩展程序包资源丰富、数据可视化与图形展示能力强等多方面突出优点^[2-3]。近年来，R 语言已经凭借其独特优势逐渐渗透到高等教育的各类课程教学之中，应用范围十分广泛，涵盖发展心理学^[4]、生物统计^[5]、医学统计学^[6]、医学院校编程类课程^[7]、统计类公共课^[8]、量化投资^[9]、数据分析课程思政^[10]等多个不同学科领域，同时已有多位国内学者探讨了 R 语言在运筹学教学与实验环节中的具体应用，积累了不少可借鉴的实践经验^[1-3]。

在此基础上，本文选取线性规划对偶理论一章的一道经典习题作为主体教学材料，专门设计了涵盖“单纯形法求解+灵敏度分析”全流程的完整教学案例，清晰完整地展示 R 语言在运筹学核心内容教学中的具体实施路径，以期为国内高校运筹学课程的数字化教学改革提供可落地的参考与借鉴。

1 R 语言及其在运筹学教学中的应用优势

1.1 R 语言简介

R 语言是一款面向统计计算与统计作图领域的免费开源软件，在当前数据分析与量化研究领域得到了极为广泛的应用。它正式诞生于 20 世纪 90 年代，由新西兰奥克兰大学的 Ross Ihaka 团队在老牌统计编程语言 S 语言的基础上开发完成，是 S 语言衍生发展出的重要分支^[11]。

得益于全球开源社区开发者的持续贡献，R 语言的功能生态一直在不断丰富完善。通过安装加载各类专门开发的扩展程序包（package），R 语言几乎可以将自身能力扩展到所有需要开展量化分析的研究与应用领域，能够适配不同领域千差万别的数据处理需求。

运筹学就是 R 语言发挥计算能力的重要应用领域之一，目前针对运筹学各类经典问题求解与分析，已经开发出上百个功能成熟的相关扩展程序包^[1]。在实际使用过程中，R 语言给使用者提供了非常灵活的运行模式：用户既可以采取交互模式，逐条输入运行命令，即时获得计算输出的结果，非常适合逐步演示教学内容；也可以采取批处理模式，将所有需要运行的命令提前保存为脚本文件，再一次性提交运行，适配批量计算与完整项目分析的需求，这种灵活的特性使得 R 语言非常适合开

作者简介：胡勋锋（1987-），男，汉族，湖北黄冈人，博士研究生，研究方向：合作博弈理论与方法。

国家自然科学基金项目(72661004)、广西自治区级重大人才培养计划项目(青年)(202501396)、广西自然科学基金项目(2025JJA110060)。

展课堂教学,也方便学生进行课后自学练习^[1]。对于想要系统学习 R 语言基础语法与编程入门知识的使用者,有关内容可参见领域内专门的入门教程^[12]。

1.2 R 语言引入运筹学教学的优势

(1) 免费开源,实验成本低。R 软件可免费下载、自由传播,使用上不存在任何功能限制,从长远上节约了高校的软件采购成本^[2,3]。

(2) 功能强大,覆盖面广。借助 lpSolve、Rglpk、igraph、ompr 等扩展包,R 可求解线性规划、整数规划、运输问题、最短路、最小生成树等几乎全部运筹学经典模型,与运筹学课程内容高度契合^[2,13]。

(3) 教学与实际应用自然衔接。与部分教学演示版软件受规模和功能限制不同,R 面向真实规模的问题求解,学生掌握的技能可直接迁移到科研与工作场景,真正实现“学以致用”^[1]。

(4) 语法简洁,易于入门。R 的语句结构相对简单,学生易于掌握,且软件自带详实的帮助文档,网上学习资源丰富,便于自主学习^[1,3]。

(5) 图形展示能力强。R 内置强大的绘图功能,可对可行域、迭代过程、灵敏度结果等进行可视化,使抽象的概念直观化,有助于激发学生的学习兴趣^[3,10]。

(6) 开放生态,持续更新。R 源代码开放,所有使用者都是其维护者,一旦出现新的算法或用户发现问题,即可通过社区及时修正更新,具有持久的生命力^[3]。

2 教学案例设计

2.1 案例内容与教学目标

线性规划是《运筹学》课程的核心内容之一,单纯形法是求解线性规划最基本、最经典的算法,灵敏度分析则是把数学求解结果转化为管理决策的关键环节^[14]。下述经典习题以“生产计划”为背景,将模型建立、单纯形法求解及灵敏度分析融为一体,是开展 R 语言辅助教学、实现“理论—算法—决策”贯通的理想载体。

设工厂生产产品 A、B、C 的数量分别为 x_1 、 x_2 、 x_3 件,在原材料甲、乙、丙的约束下追求总利润最大,其线性规划模型为:

$$\begin{aligned} \max Z &= 4x_1 + x_2 + 3x_3 \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 200 & (\text{原材料甲}) \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 500 & (\text{原材料乙}) \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 600 & (\text{原材料丙}) \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

通过本案例的教学,期望学生达到以下目标:

- (1) 掌握单纯形法的迭代原理,包括入基、出基、主元、最小比例法则与最优性条件;
- (2) 学会用 R 语言的矩阵运算构造单纯形表并进行迭代;
- (3) 掌握目标函数系数与资源右端项变化的灵敏度分析思路,即最优性条件与可行性条件。

2.2 单纯形法求解的 R 实现

单纯形法的本质是对增广约束矩阵反复进行初等行变换。在 R 中,单纯形表可以方便地表示为矩阵,基变量、检验数行与右端项分别以行名与列名标注。初始单纯形表 A_1 的构造代码如下:

#构造初始 4 行 7 列的单纯形表(基变量 x4,x5,x6; 检验数行 lambda; 右端项 b)

```
A1<-matrix(c(2,1,1,1,0,0,200,
1,2,3,0,1,0,500,
2,2,1,0,0,1,600,
4,1,3,0,0,0,0),
4,7,byrow=TRUE)

rownames(A1)<-c("x4","x5","x6","lambda")

colnames(A1)<-c("x1","x2","x3","x4","x5","x6","b")

A1
```

运行后得到初始单纯形表,如表 1 所示。

表 1 初始单纯形表 (A_1)

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	b
x4	2	1	1	1	0	0	200
x5	1	2	3	0	1	0	500
x6	2	2	1	0	0	1	600
lambda	4	1	3	0	0	0	0

检验数行已写为非基变量的线性组合。表 1 中 x_1 的检验数为正,且是最大的正检验数,故选择 x_1 入基;为确定出基变量,用最小比例法则,将 b 列除以 x_1 列的正系数,得

$$\theta = \left(\frac{200}{2}, \frac{500}{1}, \frac{600}{2} \right) = (100, 500, 300), \quad (2)$$

最小者 100 对应 x_4 , 故 x_4 出基。主元为 x_4 行与 x_1 列交叉处的 2。第一次迭代的 R 实现如下, 其核心是“主元行除以主元使主元化为 1, 其余各行通过初等行变换把主元列元素消为 0”:

```
theta<-c(200/2,500/1,600/2,NA)#theta=min(100,500,300)=100
```

```
A1<-cbind(A1,theta)
```

```
A2<-matrix(NA,4,7,byrow=TRUE)
```

```
rownames(A2)<-c("x1","x5","x6","lambda")
```

```
colnames(A2)<-c("x1","x2","x3","x4","x5","x6","b")
```

```
A2[1,1:7]<-A1[1,1:7]/2#主元行除以主元,使主元化为1
```

```
A2[2,1:7]<-A1[2,1:7]-A2[1,1:7]#消去主元列其它元素
```

```
A2[3,1:7]<-A1[3,1:7]-2*A2[1,1:7]
```

```
A2[4,1:7]<-A1[4,1:7]-4*A2[1,1:7]
```

```
A2
```

第一次迭代后的单纯形表 A_2 如表 2 所示。

表 2 第一次迭代后的单纯形表 (A_2)

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	b
x1	1	0.5	0.5	0.5	0	0	100
x5	0	1.5	2.5	-0.5	1	0	400
x6	0	1	0	-1	0	1	400
lambda	0	-1	1	-2	0	0	-400

此时 x_3 的检验数仍为正, 故 x_3 继续入基。最小比例法则给出,

$$\theta = \left(\frac{100}{0.5}, \frac{400}{2.5} \right) = (200, 160), \quad (3)$$

最小者 160 对应 x_5 , 故 x_5 出基, 主元为 x_5 行与 x_3 列交叉处的 2.5。第二次迭代的 R 实现如下:

```
theta<-c(100/0.5,400/2.5,NA,NA)#theta=min(200,160)=160
```

```
A2<-cbind(A2,theta)
```

```
A3<-matrix(NA,4,7,byrow=TRUE)
```

```
rownames(A3)<-c("x1","x3","x6","lambda")
```

```
colnames(A3)<-c("x1","x2","x3","x4","x5","x6","b")
```

```
A3[2,1:7]<-A2[2,1:7]/2.5#主元 2.5 化为 1
```

```
A3[1,1:7]<-A2[1,1:7]-0.5*A3[2,1:7]
```

```
A3[3,1:7]<-A2[3,1:7]
```

```
A3[4,1:7]<-A2[4,1:7]-A3[2,1:7]
```

```
A3
```

第二次迭代后得到最优单纯形表 A_3 , 如表 3 所示。

表 3 最优单纯形表 (A_3)

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	b
x1	1	0.2	0	0.6	-0.2	0	20
x3	0	0.6	1	-0.2	0.4	0	160
x6	0	1	0	-1	0	1	400
lambda	0	-1.6	0	-1.8	-0.4	0	-560

表 3 中所有非基变量的检验数均非正, 满足最优性条件, 故当前表已是最优表, 最优解为 $X = (20, 0, 160)$, 最优值 $Z = 560$, 即工厂应生产产品 A 20 件、产品 C 160 件、产品 B 不生产, 可获最大利润 560 元。

教学中可引导学生注意两点: 一是 θ 值取的是“ b 列与入基变量列正系数之比的最小值”, 当某行入基变量系数非正时该行不参与比较(代码中以 NA 表示); 二是每次迭代后行名随之更新, 反映基变量的更换, 这与单纯形法的“基变换”思想完全对应。

2.3 影子价格

增加 1 千克原材料甲, 对应的总利润的增加量为原材料甲的影子价格。最优表知, 原材料甲的影子价格为 1.8。增加 1 千克原材料甲, 总利润增加 1.8 元。

工厂买入原材料乙的价格为 1.2 元/千克能用 1 千克原材料乙创造 0.4 元的价值(原材料乙的影子价格), 从而工厂出售原材料乙的叫价至少应为 $1.2 + 0.4 = 1.6$ 元。

2.4 目标函数系数变化的灵敏度分析

考察产品 A 的利润系数 c_1 变化对最优解的影响。设 c_1 的变化量为 Δc_1 , 变化后 $c_1 = 4 + \Delta c_1$, 则非基变量检验数变为

$$\begin{aligned}
 & c_N - c_B B^{-1} N \\
 &= (1, 0, 0) - (4 + \Delta c_1, 3, 0) \cdot \begin{bmatrix} 0.2 & 0.6 & -0.2 \\ 0.6 & -0.2 & 0.4 \\ 1.0 & -1.0 & 0.0 \end{bmatrix} \quad (4) \\
 &= (-1.6 - 0.2\Delta c_1, -1.8 - 0.6\Delta c_1, -0.4 + 0.2\Delta c_1)
 \end{aligned}$$

若要保证原最优生产计划不变, 检验数行仍需满足最优性条件(全部非正), 即

$$\begin{cases} -1.6 - 0.2\Delta c_1 \leq 0 \\ -1.8 - 0.6\Delta c_1 \leq 0 \\ -0.4 + 0.2\Delta c_1 \leq 0 \end{cases} \quad (5)$$

分别解得 $\Delta c_1 \geq -8$ 、 $\Delta c_1 \geq -3$ 、 $\Delta c_1 \leq 2$, 取交集得 $-3 \leq \Delta c_1 \leq 2$ 即产品 A 的利润系数 c_1 可在 $4 - 3 = 1$ 至 $4 + 2 = 6$ 之间波动, 原最优方案保持不变。

教学中可安排学生用 R 做“参数扫描”验证: 分别令 $c_1 = 1$ 、 $c_1 = 6$ 、 $c_1 = 7$, 重新求解, 观察最优解是否改变。学生会发现 $c_1 = 1$ 和 $c_1 = 6$ 时最优方案保持不变, 而 $c_1 = 7$ 时最优解发生改变, 从而直观地验证灵敏度区间的正确性, 加深对“区间有效”这一概念的理解。

2.5 资源右端项变化的灵敏度分析

考察原材料甲的供应量 b_1 变化对最优解的影响。设 b_1 从 200 变为 $200 + \Delta b_1$, 仍只生产 A、C 两种产品意味着 x_1 、 x_3 仍为基变量, 即最优基不变。 b 的变化只影响右端项 $B^{-1}b$, 只要 $B^{-1}b \geq 0$, 最优基即保持不变。由最优表 A_3 得

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.2 & 0 \\ -0.2 & 0.4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B^{-1}b = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.2 & 0 \\ -0.2 & 0.4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 200 + \Delta b_1 \\ 500 \\ 600 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6\Delta b_1 + 20 \\ -0.2\Delta b_1 + 160 \\ -\Delta b_1 + 400 \end{bmatrix} \quad (6)$$

为保证最优基不变, 需满足可行性条件 ($B^{-1}b \geq 0$), 即

$$\begin{cases} 0.6\Delta b_1 + 20 \geq 0 \\ -0.2\Delta b_1 + 160 \geq 0 \\ -\Delta b_1 + 400 \geq 0 \end{cases} \quad (7)$$

解得 $\Delta b_1 \geq -\frac{100}{3}$ 、 $\Delta b_1 \leq 800$ 、 $\Delta b_1 \leq 400$, 取交集得

参考文献:

- [1] 李光. 基于 R 语言的管理运筹学教学实验设计[J]. 高教学刊, 2020(3): 95-100.
- [2] 高成强. R 语言在几类优化问题中的应用[J]. 价值工程, 2019, 38(17): 238-240.
- [3] 潘东东, 童艳彩, 陈兴, 等. 基于 R 的运筹学实验教学实践与探讨[J]. 统计与管理, 2014(1): 174-175.
- [4] 周小梅. R 语言在“发展心理学”教育教学中的应用[J]. 教育教学论坛, 2026(5): 144-147.
- [5] 龚高, 刘玲玲, 陈秋明, 等. R 语言在《生物统计附试验设计》实验教学中应用[J]. 现代畜牧科技, 2025(7): 167-170.
- [6] 邱越, 何蓉. R 语言在医学统计学中的应用探索[J]. 电脑知识与技术, 2024, 20(32): 55-57, 61.
- [7] 付小雪, 胡声丹, 杨洁敏, 等. 医学院校的 R 语言课程教学重构探索[J]. 中国现代医生, 2024, 62(31): 85-89.

$$-\frac{100}{3} \leq \Delta b_1 \leq 400, \quad (8)$$

即原材料甲的供应量 b_1 可在 500/3 (约 166.67) 至 600 之间波动, 原最优基保持不变。

教学中可让学生分别取 $b_1 = 170$ 、 $b_1 = 600$ 、 $b_1 = 650$ 重新求解, 观察基变量集合是否改变, 从而体会可行性条件与灵敏度区间的对应关系。

2.6 新产品投产分析

增加产品 D 相当于增加一个决策变量。该产品是否值得投产取决于它是否能充当基变量。

若在最优表中应入基, 则值得投产, 否则不投产。记 D 的中间利润为 c , 则它对应的检验数应为

$$c - c_B B^{-1}P = c - (4 \quad 3 \quad 0) \cdot \begin{bmatrix} 0.6 & -0.2 & 0 \\ -0.2 & 0.4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = c - 4.4.$$

当 $c - 4.4 \geq 0$, 即 $c \geq 4.4$ 时, 产品 D 值得投产, 否则不值得投产。

3 结语

本文以经典习题为主体材料, 展示了 R 语言在《运筹学》线性规划教学中的具体应用。实践表明, 将免费开源的 R 语言引入运筹学教学, 能够有效化解传统教学中“重理论、轻实践”的矛盾, 帮助学生直观理解算法原理、深入领会灵敏度分析的经济含义, 并培养其计算与编程能力。随着 R 语言生态的不断完善, 其在运筹学教学乃至整个量化分析类课程中的应用前景十分广阔, 值得进一步探索与推广。

- [8] 常秦.统计类公共课中融入编程实践的探索——基于 R 语言的多维思考[J].创新创业理论研究与实践,2025,8(21):30-33,40.
- [9] 殷绪螺,唐文婷.基于 R 语言的量化投资课程教学改革实践探索[J].才智,2025(34):161-164.
- [10] 郭小雨.思政背景下的 R 语言数据分析教学改革[J].计算机教育,2025(4):109-114.
- [11] Ihaka R,Gentleman R.R:A language for data analysis and graphics[J].Journal of Computational and Graphical Statistics,1996,5(3):299-314.
- [12] 薛毅,陈立萍.R 语言实用教程[M].北京:清华大学出版社,2014.
- [13] Csardi G,Nepusz T.The igraph software package for complex network research[J].InterJournal,Complex Systems,2006,1695(5):1-9.
- [14] 胡运权.运筹学教程[M].4 版.北京:清华大学出版社,2012.