

AI-Python 双轨验证法在教学中的设计研究

——以导数几何意义的数值探究为例

刘亚杰 冯鹏鹏

塔里木大学 新疆 阿拉尔 843300

【摘要】：导数几何意义的教学长期面临“极限过程不可见”的困境：学生能背诵“切线斜率即导数”，却难以理解割线斜率如何随间距趋零而逼近切线斜率。针对此问题，提出“AI-Python 双轨验证法”实验教学模式，由生成式 AI 生成数学猜想与推理路径，再由 Python 数值计算逐条验证。以 $f(x)=x^2$ 在 $x=1$ 处的切线斜率为核心案例，揭示导数定义中“极限”概念的数值内涵，为 AI 辅助数学概念教学提供一种可验证的实践路径。

【关键词】：AI 辅助教学；Python 可视化；导数几何意义；数值微分；双轨验证法；浮点精度

DOI:10.12417/2705-1358.26.15.039

1 引言

导数的几何意义“切线斜率即导数值”是高中数学必修课程的核心概念^[2]。然而，这一概念的教学长期面临一个根本性困难：极限过程是“动态”的，但教材呈现是“静态”的，学习者往往难以直观把握收敛机制^[10]。

近年来，Python 科学计算生态在数学教育中的应用受到关注^[5]。以 Python 数值计算替代静态结论，以可验证数据替代主观判断，对概念教学具有方法论上的借鉴价值。与此同时，生成式 AI 在教育场景中的角色引发了广泛讨论^[1]。

一个尚未充分探索的问题是：能否将 AI 的“推理能力”与 Python 的“计算能力”组合为一条“双轨”，即 AI 负责生成数学猜想和推理路径，Python 负责逐条验证，两者之间的“对话”本身构成教学过程。

2 理论基础

2.1 认知理论基础

从认知理论视角审视，双轨验证法的设计逻辑可锚定于以下两个理论框架：

认知负荷理论^{[4][7]}认为，教学应减少无关认知负荷，优化相关认知负荷。在本设计中，AI 将原本需要学生自己搜索和试错的负荷外化；Python 将抽象符号转化为具体数值。^[11]

APOS 理论^{[8][9]}指出，数学概念的建构需经历“操作→过程→对象→图式”的认知阶段。双轨验证法通过 Python 数值表强制回补了“操作”与“过程”阶段，AI 推理则学生在此过程中形成“对象”层面的抽象概括，最终整合为完整的“图式”。

2.2 导数定义与割线逼近

函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处的导数定义为：

$$f'(a)=\lim_{h \rightarrow 0} [f(a+h)-f(a)]/h$$

其几何意义是：当 h 趋近于零时，过点 $(a, f(a))$ 和 $(a+h, f(a+h))$ 的割线斜率趋近于该点处的切线斜率。

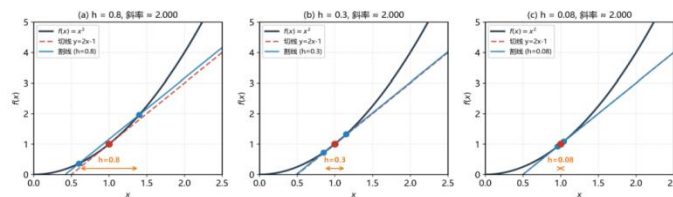


图1 割线向切线逼近示意图

对于 $f(x)=x^2$ ，在 $x=1$ 处，精确导数值 $f'(1)=2$ 。割线斜率为 $k(h)=[f(1+h)-f(1)]/h=[(1+h)^2-1]/h=2+h$ 。理论上，当 $h \rightarrow 0$ 时， $k(h) \rightarrow 2$ 。

2.3 AI-Python 双轨验证法的设计逻辑

双轨验证法的核心逻辑包含三个环节：

环节一（AI 猜想）：学生向生成式 AI 提出数学问题，AI 基于自然语言生成推理路径，可能包含正确的数学论证，也可能包含微妙的推理缺陷或近似不当。环节二（Python 验证）：学生运行 Python 代码，对 AI 提出的推理路径进行数值验证。环节三（反思修正）：学生比较 AI 的推理与 Python 的计算结果。当两者一致时，确认概念理解；当两者出现偏差时，分析偏差来源，这是学生深层学习的触发点。

3 Python 数值实现与精度分析

本章遵循双轨验证法的核心逻辑，将 AI 的典型推理表述为若干可检验的“数学断言”，随后通过 Python 数值实验生成可复现的数据，分析割线斜率向导数值的收敛过程并逐条验证。

3.1 核心案例： $f(x)=x^2$ 在 $x=1$ 处

以 $f(x)=x^2$ 为对象，计算 $x=1$ 处不同间距 h 下的割线斜率。
下表列出了 h 从 1 到 10^{-10} 的计算结果。

表 1 $f(x)=x^2$ 在 $x=1$ 处不同间距 h 下的割线斜率及误差

间距 h	割线斜率 $k(h)$	精确值 $f'(1)$	绝对误差 $ k(h)-2 $	相对误差
1	3.0000000000	2	1.00×10^0	50.00%
1×10^{-1}	2.1000000000	2	1.00×10^{-1}	5.00%
1×10^{-2}	2.0100000000	2	1.00×10^{-2}	0.50%
1×10^{-3}	2.0010000000	2	1.00×10^{-3}	0.05%
1×10^{-4}	2.0001000000	2	1.00×10^{-4}	0.005%
1×10^{-5}	2.0000100000	2	1.00×10^{-5}	0.0005%
1×10^{-6}	2.0000010000	2	1.00×10^{-6}	0.00005%
1×10^{-7}	2.0000001011	2	1.01×10^{-7}	$5 \times 10^{-6}\%$
1×10^{-8}	1.9999999878	2	1.22×10^{-8}	$6 \times 10^{-7}\%$
1×10^{-9}	2.0000001655	2	1.65×10^{-7}	$8 \times 10^{-6}\%$
1×10^{-10}	2.0000001655	2	1.65×10^{-7}	$8 \times 10^{-6}\%$

上表显示，在 h 从 1 到 10^{-6} 的范围内，割线斜率 $k(h)=2+h$ 的数值计算与解析解完全吻合，绝对误差恰好等于 h 。但从 $h=10^{-7}$ 开始，误差偏离了理论值， $h=10^{-7}$ 时误差为 1.01×10^{-7} （理论值为 1.00×10^{-7} ）， $h=10^{-9}$ 时误差反升至 1.65×10^{-7} ， $h=10^{-10}$ 时误差不再下降。通过 Python 数值实验发现：IEEE 754 双精度浮点数在计算 $(1+h)^2-1$ 时遭遇了灾难性抵消 (catastrophic cancellation) [6]，有效位数从约 15-16 位迅速退化。

3.2 数值精度陷阱：浮点误差的显现

为观察浮点误差的完整退化过程，将 h 从 10^{-8} 延伸至 10^{-16} ：

表 2 浮点精度边界下的割线斜率误差退化过程

间距 h	割线斜率 $k(h)$ (float64)	绝对误差	误差变化趋势
1×10^{-8}	1.9999999878	1.22×10^{-8}	接近理论值
1×10^{-9}	2.0000001655	1.65×10^{-7}	误差反升
1×10^{-10}	2.0000001655	1.65×10^{-7}	误差停滞
1×10^{-12}	2.0001778012	1.78×10^{-4}	急剧恶化

1×10^{-13}	1.9984014443	1.60×10^{-3}	持续恶化
1×10^{-15}	2.2204460493	2.20×10^{-1}	完全失真
1×10^{-16}	0.0000000000	2.00×10^0	分子为零

(注：续表 2)

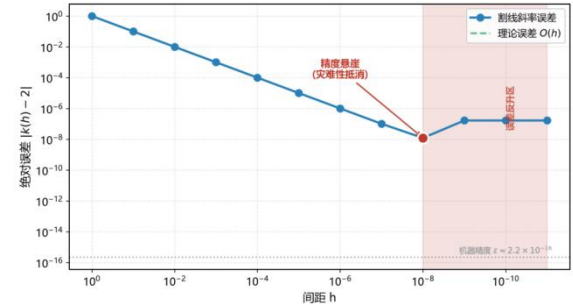


图 2 浮点误差随 h 减小的变化趋势

上表揭示了一个关键教学契机： h 在 10^{-8} 至 10^{-7} 之间时，误差已偏离理论值； h 降至 10^{-12} 时，误差暴增至 1.78×10^{-4} （理论值应为 10^{-12} ）； h 降至 10^{-16} 时， $(1+h)^2$ 与 1 在浮点表示上完全相同，分子 $[f(1+h)-f(1)]$ 退化为 0，割线斜率直接算出 0。这一“灾难性抵消”现象是 IEEE 754 双精度浮点数的固有限制，约 15-16 位有效数字在两数相减时迅速丢失。

在双轨验证法的框架下，这正是“AI 推理”与“Python 计算”产生分歧的核心节点：AI 基于数学推理回答“ h 越小越精确”，但 Python 的计算结果在 $h < 10^{-8}$ 后已开始偏离理论值。学生需要理解：AI 的数学推理在逻辑上是正确的，Python 的数值结果受限于浮点精度，两者之间的张力揭示了“数学极限”与“计算精度”的本质差异。

3.3 拓展案例：不同函数的收敛速率对比

将方法拓展至 $f(x)=\sin(x)$ 在 $x=0$ 处和 $f(x)=e^x$ 在 $x=0$ 处，对比三个函数的收敛速率：

表 3 三函数割线斜率误差收敛速率对比

间距 h	x^2 的误差 ($x=1$)	$\sin(x)$ 的误差 ($x=0$)	e^x 的误差 ($x=0$)	收敛阶
1×10^{-1}	1.00×10^{-1}	1.67×10^{-3}	5.17×10^{-2}	——
1×10^{-2}	1.00×10^{-2}	1.67×10^{-5}	5.02×10^{-3}	$x^2: O(h), \sin: O(h^2), \exp: O(h)$
1×10^{-3}	1.00×10^{-3}	1.67×10^{-7}	5.00×10^{-4}	$x^2: O(h), \sin: O(h^2), \exp: O(h)$
1×10^{-4}	1.00×10^{-4}	1.67×10^{-9}	5.00×10^{-5}	$x^2: O(h), \sin: O(h^2), \exp: O(h)$
1×10^{-5}	1.00×10^{-5}	1.67×10^{-11}	5.00×10^{-6}	$x^2: O(h), \sin: O(h^2), \exp: O(h)$
1×10^{-6}	1.00×10^{-6}	1.67×10^{-13}	5.00×10^{-7}	$x^2: O(h), \sin: O(h^2), \exp: O(h)$

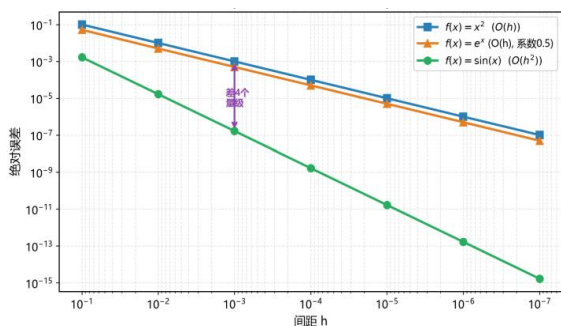


图3 三函数收敛速率对比

表3揭示了三个函数的误差收敛特征： $f(x)=x^2$ 的误差恰好等于 h ，呈一阶收敛 $O(h)$ ； $f(x)=\sin(x)$ 的误差约为 $h^2/6$ ，呈二阶收敛 $O(h^2)$ ，比 x^2 快一个数量级，这是因为 $\sin(x)$ 的泰勒展开中一次项系数为1，主导误差项升至二阶 $h^2/6$ ； $f(x)=e^x$ 的误差约为 $h/2$ ，同样是一阶收敛 $O(h)$ ，但系数(0.5)小于 x^2 的系数(1.0)。

4 讨论与反思

4.1 双轨验证法的独特价值

传统导数教学中，教师和教材是知识的唯一来源，学生处于“接受—记忆”的位置。双轨验证法引入了两个知识来源：

AI的推理和Python的计算，两者之间形成参照。当两者一致时，学生的理解得到确认；当两者分歧时，学生自然进行深层思考。

4.2 实施中的挑战

第一，AI输出的不可预测性。生成式AI对同一问题的回答在不同时间可能不同，教师需具备判断AI推理正确性的数学素养。第二，课时压力。双轨验证法的环节较多，课时紧张可视实际情况压缩拓展对比环节。

4.3 研究局限

双轨验证法的教学效果有待后续准实验研究的检验。本文提供的数值表可作为后续实证研究的研究工具。

6 结论

双轨验证法构建了“AI生成断言→Python数值验证→学生反思修正”的三环教学结构，其独特教学价值在于：当AI推理与Python计算一致时，学生获得量化确认；当两者分歧时，学生被引导进行数学对象与计算对象的本体论反思。这一“分歧驱动”的学习机制，为AI辅助数学概念教学提供了一种可验证、可复现的实践路径。

参考文献：

- [1] 邵铭宇,魏亮,李均强,等.生成式人工智能与动态可视化软件整合——原理与实现,应用与展望[J].数学教育学报,2025,34(4):27-35.
- [2] 中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准(2017年版 2020年修订)[S].北京:人民教育出版社,2020.
- [3] 人民教育出版社,课程教材研究所.普通高中教科书·数学(A版)必修第一册[M].北京:人民教育出版社,2019.
- [4] Sweller J,Ayres P,Kalyuga S.Cognitive Load Theory[M].New York:Springer,2011:1-25.
- [5] 魏鹏飞.运用Python探究数学问题培养高中生计算思维——以“圆周率近似值的计算”为例[J].实验教学与仪器,2024,41(5):101-103.
- [6] Goldberg D.What Every Computer Scientist Should Know About Floating-Point Arithmetic[J].ACM Computing Surveys,1991,23(1):5-48.
- [7] Canhasi-Kasemi E,Orhani S,Temaj I.Using Sweller's Cognitive Load Theory to Improve Learning of Derivative Concepts[J].European Journal of Science and Mathematics Education,2026,14(2):187-202.
- [8] 夏智鹏,林子植.生成式AI赋能数学教育理论的实践研究——以APOS理论为例[J].数学教学通讯,2025(36):3-9.
- [9] Dubinsky E,McDonald M A.APOS:A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research[C]//Holton D.The Teaching and Learning of Mathematics at University Level:An ICMI Study.Dordrecht:Kluwer Academic Publishers,2001:275-282.
- [10] 张奠宙,宋乃庆.数学教育概论[M].北京:高等教育出版社,2016:125-132.
- [11] 李士琦.PME:数学教育心理[M].上海:华东师范大学出版社,2001:89-95.