

# 几类曲线在微积分教学中的价值研究

赵 燕<sup>1</sup> 赵 平<sup>2</sup>

1. 济南大学 数学科学学院 山东 济南 250022

2. 山东师范大学 计算机与人工智能学院 山东 济南 250358

**【摘要】**：微积分是高等数学的核心组成部分，其概念的抽象性、逻辑的严密性与运算的复杂性既是学生学习的难点，也是高等数学教学改革的重要突破口。在微积分课程中，有些典型的曲线占据十分重要的教学地位，如笛卡尔叶形线、摆线、星形线、心形线、双纽线，这几类曲线不仅具备鲜明独特的几何性质，同时蕴含着丰富的微积分应用场景。本文以这几类曲线为研究对象，探究其在微积分概念教学、计算训练、思维培养与美育渗透中的多元教学价值，为优化微积分课堂教学、助力学生深度学习提供参考。

**【关键词】**：微积分；隐函数；极坐标；数学美

DOI:10.12417/2705-1358.26.14.082

## 1 引言

微积分的研究都是以函数为载体展开的，知识体系涵盖极限、导数、微分、定积分、曲线几何应用等核心内容，理论抽象、逻辑性强。尤其对于从显函数  $y=f(x)$  到非显式表达函数的导数计算，为多元微积分、解析几何、物理应用搭建桥梁，是高等数学微积分教学中承上启下的关键内容。

对于特殊类型的函数比如隐函数、参数方程确定的函数以及极坐标函数的微分，是一元函数微分学的拓展内容，既是导数运算能力的综合训练，又是平面曲线几何应用、一元积分的工具，同时为多元微积分中的隐函数定理、空间曲线、二重积分极坐标变换做好前置铺垫，在微积分课程中起到承上启下的教学地位<sup>[1]</sup>。在教学过程中我们发现，很多学生在学习过程中易陷入机械记忆公式、被动刷题的误区，难以理解知识本质，无法建立几何直观与代数运算的关联<sup>[2]</sup>。在教学实践中有些函数曲线在微积分教学中有着特殊的地位和作用，如笛卡尔叶形线、摆线、星形线、心形线、双纽线等曲线，它们具备独特的方程形式、几何特征与变化规律，是微积分教学中不可缺少的经典教学模型，具备一定的教学研究与实践应用价值。以下我们通过对这几类经典曲线的教学内容分析，探究其在微积分概念教学、计算训练、思维培养与美育渗透中的多元教学价值。

## 2 几类曲线的教学内容分析

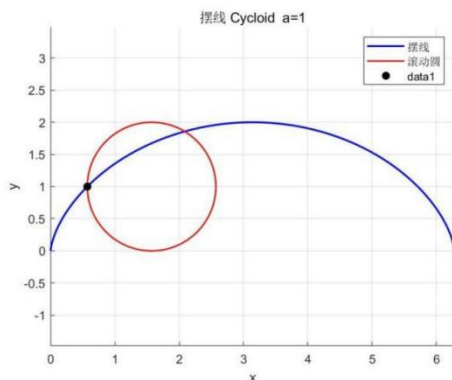
微积分以函数为核心研究对象，以极限为基本思想，围绕微分、积分两大核心模块形成完整知识体系，其概念具备较强的抽象性。除了常见的基本初等函数之外，对于隐函数、由参数方程所确定的函数、极坐标函数等函数形式的微积分，是高等数学教学的重点，也是学生学习的难点<sup>[3]</sup>。所以，我们通过数学中的典型曲线作为标杆例题进行讲解分析，就能够将抽象的微积分概念具象化，让学生更好地把握微分、积分、极限、

几何应用等核心教学内容，在微积分概念教学中有着不可替代的体现与作用。

笛卡尔叶形线  $x^3 + y^3 - 3axy = 0$  作为典型的隐函数线，是隐函数微分、渐近线、奇点分析等概念教学的重要例子。在隐函数求导的教学过程中，我们可以先利用笛卡尔叶形线这样的曲线的切线问题为引例，引导学生讨论隐函数的求导问题的必要性和重要性。在教学设计上，因为该曲线无显式函数表达式，无法直接套用常规求导公式<sup>[4]</sup>，通过两边同时对自变量求导的隐函数求导过程，能够直观体现微分运算的本质是对函数变化规律的求解，让学生理解微分运算不局限于显函数。同时，曲线存在原点自交点的奇点特征、唯一斜渐近线的几何性质，可帮助学生区分函数奇点、渐近线的微积分定义，深化对函数局部形态与变化趋势的理解，弥补了初等函数图像规律单一、无法体现复杂函数特性的教学短板，一定程度上完善了微积分运算的教学。

摆线  $\begin{cases} x = a(\theta - \sin \theta) \\ y = a(1 - \cos \theta) \end{cases}$ ，也叫旋轮线，它是参数方程函数的

典型代表，是由一个圆沿一条固定直线纯滚动，圆周定点形成的轨迹。如图所示：



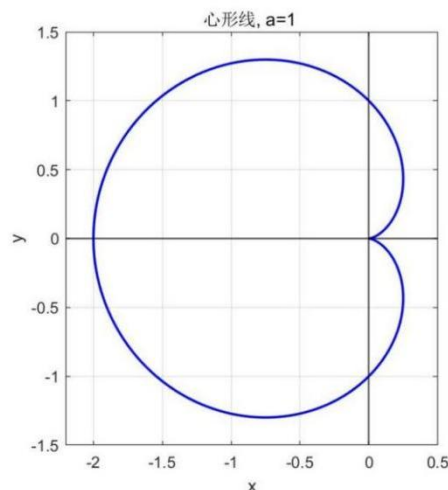
摆线以滚动角为参数构建参数方程,完美诠释了参数函数的变量变换规律,其参数求导过程直观展现了“通过参数过渡求解函数变化率”的微分思想,让学生具象理解一阶导数的切线几何意义与二阶导数的曲线凹凸性概念。同时,摆线作为滚动形成的参数曲线,对应微积分内容中的参数方程求导、曲线弧长、旋转体体积计算等知识点,其规整的拱形结构、固定的弧长与面积结论,是参数积分教学的经典范例,将抽象的积分累积思想转化为具象的几何运算,帮助学生理解参数方程下微积分运算的逻辑,突破常规显函数教学的局限性。同时依托最速降线、等时摆的特殊性质,实现了微积分知识与物理应用的结合,拓展了教学的广度与深度。

星形线  $\begin{cases} x = a \cos^3 \theta \\ y = a \sin^3 \theta \end{cases}$  也是在微积分教学中很引人注目的一

类曲线,它和摆线、心形线同属于滚轮曲线大类,三者统称滚轮曲线。星形线作为闭合型参数曲线,外形图像美观,能够激发学生学习数学的兴趣。星形线在微积分教学中有着重要的作用,其简洁的三角参数方程,不仅可以实现一阶、二阶参数求导,准确反映曲线各点的变化率与凹凸性,还能通过参数区间变换,完成闭合曲线面积、全长、旋转体体积与表面积的完整计算。相较于其他曲线,星形线作为四尖点闭合参数曲线,方程简洁、对称性强,帮助学生更好地掌握参数方程二阶求导、闭合图形面积、曲线全长、旋转体体积与表面积等综合题型,能够帮助学生深化对微积分“微观求变、宏观求和”核心思想的理解。

相比直角坐标,大多数学生对于极坐标的认识是比较陌生的,但是从直观上来讲,对于旋转对称曲线,极坐标远优于直角坐标。所以以下两种极坐标曲线是微积分教学中常用的典型案例,可以帮助学生打通直角坐标和极坐标的坐标系认知。通过简洁的极坐标形式,更好的让学生理解“坐标系是工具,要根据曲线形态合理选择”<sup>[5]</sup>。

心形线是蚌线(蜗牛线)的特殊情形,也是一类漂亮的滚轮曲线,它的几何构造是由一个圆沿着另一个半径相等的定圆外侧无滑动滚动,动圆上某一定点所形成的轨迹。它有四种不同的开口方向,分别是: $\rho = a(1 - \cos\theta)$ (开口向左)、 $\rho = a(1 + \cos\theta)$ (开口向右)、 $\rho = a(1 + \sin\theta)$ (开口向上)和 $\rho = a(1 - \sin\theta)$ (开口向下)。比如 $\rho = a(1 - \cos\theta)$ 下图所示:



心形线是微积分教学中绝佳的综合训练载体。例如:在定积分的应用微元法部分,心形线可以用来讲解“扇形微元”思想,对比直角坐标下长条微元;还可以利用极坐标计算曲线弧长,同时心形线也是利用对称性简化积分计算的典型例子。另外还可以通过让学生思考心形线绕极轴旋转,求旋转体体积、旋转曲面的体积及表面积作为定积分学习的课后拓展。心形线的尖点也是说明“连续但不可导”的具体实例,让学生直观理解曲线不一定处处光滑。另外,还有一个广为流传的笛卡尔心形线情书的小故事跟心形线密切相关,虽然它只是文学传说,并非史实,但是我们可以通过心形线的爱情传说降低数学的距离感,把冰冷公式赋予人文色彩,激发学生好奇心,愿意主动去画图、推导方程、计算面积弧长。对于大一新生,情感驱动是重要学习动力。当然我们不能只讲故事,还要还原历史真相,因为心形线事实上是由雷恩发现的,我们可借此向学生讲授数学史中相关曲线的命名典故,梳理微积分一脉相承的清晰发展脉络,将史实与传说加以对照,以此培养学生求真务实的科学意识。

另一个常见的极坐标曲线是双纽线  $\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$ ,它简洁的极坐标方程直观展现了极坐标函数的变量对应关系,其定义域由余弦函数取值范围决定,可辅助学生理解极限存在条件、函数定义域与曲线形态的关联。在积分教学中,双纽线借助其对称的几何特征,通过极坐标积分求解平面面积、曲线弧长,让学生掌握极坐标体系下“利用对称性简化极限求和、积分运算”的核心思想,区分直角坐标与极坐标微积分运算的差异,从而完善学生对积分几何应用的认知体系。

综上,这几类经典曲线有着不同于一般基本初等函数的函数形式,它们作为微积分核心概念学习和研究的重要载体,更好地帮助学生理解微积分的抽象概念。在教学中依托这些曲线展开讲解,能够打破纯理论教学的枯燥感,帮助学生建立“函数形态—微积分运算—几何性质”的联动认知,真正吃透微积

分核心概念的本质内涵。引导学生在解决问题中理解概念、掌握方法、提升思维,着力培养学生数学抽象、逻辑推理、数学运算、数学建模与应用创新素养,实现从“学会计算”到“会用数学思维解决问题”的转变。

### 3 几类曲线在微积分教学中的价值分析

微积分中的概念抽象性较强,如果脱离具象几何,单纯依靠理论讲解难以让学生透彻理解。概念学习包含抽象、概括、辨析、判断的过程。学生经历从具体实例提炼本质属性、区分易混淆概念的过程,锻炼抽象概括、逻辑推理能力,这是数学思维形成的关键。这几类曲线将导数的几何意义、微分的变化规律、积分的几何应用等抽象概念,转化为直观的图像特征。通过曲线的切线斜率变化,学生可直观感知一阶导数的单调性、二阶导数的凹凸性;通过曲线闭合区域、弧长形态,可帮助学生更好的理解定积分的几何意义,构建“代数运算+几何直观”的双重认知体系,有效化解微积分知识晦涩难懂的学习困境,是常见的基本初等函数教学的有益补充。

从培养学生的计算能力的角度来看,这几类经典曲线在隐函数求导、极坐标函数的微积分、元素法的应用等重点内容的学习有着重要的作用,在计算方法上能够帮助训练学生的微积分运算能力。学生通过探究曲线的几何性质、求解曲线相关的各类参数与数值,可熟练掌握参数代换、隐函数运算、对称性简化积分等核心解题方法,并且举一反三,实现以典题通一类题的学习效果,夯实微积分计算核心能力。

从培养学生的数学核心素养的角度分析,这几类经典曲线的教学应用,能够有效培养学生数形结合、等价转化、分类讨论的核心数学思维。在解题与探究过程中,学生需要灵活切换直角坐标、极坐标、参数方程形式,将复杂的几何问题转化为标准化的微积分运算问题,实现知识的灵活迁移。同时,在积

分学求面积、弧长、旋转体参数等内容也起到重要的示范作用。

数学美育是数学教学内在的组成部分。我们在教学过程中要向学生传递数学的简洁美、对称美、统一美、奇异美、逻辑严谨美,结合数学史、思想方法,实现知识传授、思维训练与审美熏陶融合,落实核心素养<sup>[6]</sup>。以上几类曲线不同于常规函数图像的单调刻板,它们构图美观、结构精巧优美,兼具秩序美、对称美与逻辑美,蕴含深厚的数学美学价值。在微积分教学中渗透美育,能够改变学生“数学只是刷题计算”的刻板印象,打破学生对微积分枯燥、晦涩的固有认知,激发学习内在动机;让学生在观察曲线形态、探究曲线性质的过程中,感知数学的严谨性与艺术性,有效缓解高数学习的畏难情绪;促使学生感悟概念、公式背后的思想内涵,深化对数学概念的理解;在感受逻辑、统一、简洁之美的同时,涵养理性精神,实现知识、思维、审美与品格的协同发展。同时,曲线背后的数学史与物理应用,能够激发学生的探索欲望,引导学生从被动学习转向主动探究,实现知识学习、思维提升与美育熏陶的有机统一。

### 4 结论

以上我们分析的几类曲线,不仅是高等数学课程内容的典型案例,更兼具知识训练、思想启发和美育价值,是微积分教学中兼具实用性与创新性的优质教学资源。在微积分教学中合理运用这些经典曲线,不仅能够具象化抽象理论、夯实学生运算能力、完善知识体系,更能够培养学生的数学思维、渗透数学美育,落实课程思政,全方位提升微积分课堂教学质量。数学不只是计算工具,同时拥有美学价值,依托经典曲线开展教学,能够有效破解微积分教学难点,助力学生真正理解微积分知识本质,实现从被动记忆到主动探索、从机械运算到灵活应用的深度学习转变,为高等数学后续学习奠定坚实基础。

### 参考文献:

- [1] 同济大学数学系.高等数学:上册[M].北京:高等教育出版社,2014.7.
- [2] 白明月.微积分教学过程中易错点解析[J].科技风,2020(14):100,102.
- [3] 李霞.“隐函数的求导”教学中数学思想方法的运用[J].价值工程,2017,36(32):209--210.
- [4] 张芬,吴红星,石黄萍,等.微积分中一元函数求导方法探讨[J].上饶师范学院学报,2022,42(03):1--5.
- [5] 任变青,杨晓峰.对微积分教学中有关极坐标教学方法的探讨[J].成功(教育),2013(04):30.
- [6] 刘清之.感受数学美——以微积分为例,湖南教育(C版). 2017(01) :50.