几何综合问题的多策略探究与核心素养培养

——以 2022 年云南省中考数学第 23 题为例

马宏微

昆明市第八中学 云南 昆明 100032

【摘　要】：本文以 2022 年云南省中考数学第 23 题为例，深入探讨了几何综合问题的多种解题策略及其在培养学生数学核心素养方面的价值。通过分析截长补短、旋转构造、垂直构造等不同解法的思维路径，揭示了几何教学与逻辑推理、直观想象、数学建模等核心素养的深度融合。最后，提出了基于核心素养的几何教学建议，为中学数学教学提供参考。

【关键词】：几何综合问题；多策略探究；核心素养；中考数学；数学教学

DOI:10.12417/2705-1358.25.23.045

引言

几何综合题作为中考数学的重要组成部分，不仅考查学生的基础知识掌握程度，更是衡量学生数学思维能力和核心素养发展水平的重要标尺。2022 年云南省中考数学第 23 题因其丰富的内涵、多样的解法及对核心素养的全面考查，成为研究几何综合题教学价值的典型范例。本文将通过深入剖析此题，探索几何教学的新路径，为核心素养在数学课堂中的有效落实提供实践参考。

1 研究背景（问题的提出）

1.1 现实困境与教学痛点

在近年云南省中考数学阅卷分析中，几何综合题的得分率持续偏低.在日常教学中发现，学生面对此类问题时普遍存在以下困难：（1）几何直观薄弱：复杂图形中难以提取关键信息，如圆内接四边形的性质、动点轨迹分析等。（2）知识迁移能力不足：无法将分散的知识点（如相似三角形、勾股定理、截长补短法）有效串联。（3）解题策略单一：依赖教师示范，缺乏自主探究不同解法的意识和能力。

1.2 政策导向与课标要求

《义务教育数学课程标准（2022 年版）》明确提出：“通过几何图形的运动、变换和推理，发展空间观念和推理能力”.同时，“双减”政策要求“压减机械训练，提升思维品质”.在此背景下，本案例以中考真题为载体，探索"一题多解、多题归一"的教学模式，实现减负增效。

2 几何综合题的特点与考查方向

2.1 综合性

知识的网络化融合：题目通常以三角形、四边形、圆等基本图形为舞台，将它们的性质（如角平分线、中线、垂直平分线、圆的切线、圆周角等）进行有机串联。解题过程中，需要灵活切换并综合运用全等三角形、相似三角形、勾股定理、三角函数、对称变换、旋转性质等多种工具[1]。

承上启下的逻辑链条：综合题的解答像一个“推理故事”，前一步的结论是后一步的条件。例如，先通过证明全等得到边相等，再利用这些边构成新的三角形证明相似，最后利用相似比结合勾股定理进行最终的计算。这种环环相扣的结构要求学生具备清晰的逻辑思维和整体规划能力。

辅助线的关键作用：能否添加恰当的辅助线，是破解许多几何综合题的“钥匙”。这需要学生基于对图形结构的深刻理解，通过连接、延长、作垂线、构造平行线、构造特殊图形等手段，将隐藏的关系显现出来，化陌生为熟悉，化复杂为简单[2]。

2.2 开放性

解法路径的多样性：一道优秀的综合题，往往存在两种甚至多种截然不同的解题思路。例如，证明线段相等，可能通过“全等三角形”、“等腰三角形三线合一”、“垂直平分线性质”、“平行四边形对角线互相平分”或“三角形相似推比例线段”等多种途径实现。这鼓励学生从不同角度审视问题，培养求异思维。

作者简介：马宏微，1988 年 1 月 24 日，女，吉林省松原市人，汉族，本科，中学一级教师。研究方向：中学数学教学。

思维过程的差异性：不同的解法路径可能带来运算复杂度和思维深度的差异。有的方法可能计算繁琐但思路直接，有的方法则构思巧妙、计算简洁。这不仅能区分学生的思维水平，也引导学生追求最优化的解题策略。

结论与探索的开放：部分题目会设计成“存在性”或“探究性”问题，如“是否存在某个点，使得某个三角形为等腰三角形？”或“探究两条线段数量关系的变化规律”。这类问题没有预设的固定答案，要求学生全面分析，分类讨论，充分体现了数学的探索本质[3]。

2.3 对核心素养的要求

逻辑推理能力：这是几何的“灵魂”。要求学生能清晰地写出每一步的推理依据，从“因为”到“所以”，逻辑严密，言必有据，形成完整的证明链条。

直观想象能力：包括对几何图形的运动、变换与组合的想象。例如，在脑海中“旋转”一个三角形，或“折叠”一个图形以利用对称性。这种能力有助于学生快速洞察图形结构，预判可能的结论和辅助线作法。

运算求解能力：几何综合题的终点常常是定量的计算。这涉及准确的代数运算，特别是利用勾股定理、相似比、锐角三角函数建立方程并进行求解，要求计算过程沉稳、精确[4]。

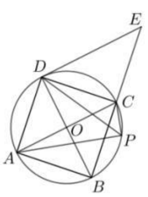
3 案例描述

3.1 问题原型与教学重构

原题呈现：如图1，四边形ABCD的外接圆是以BD为直径的⊙O，P是⊙O的劣狐BC上的任意一点，连接PA、PC、PD，延长BC至E，使$BD^2=BC\cdot BE$.

（1）请判断直线DE与⊙O的位置关系，并证明你的结论；

（2）若四边形ABCD是正方形，连接AC，当P与C重合时，或当P与B重合时，把$\frac{PA+PC}{PD}=\sqrt{2}$转化为正方形ABCD的有关线段长的比，可得$\frac{PA+PC}{PD}=\sqrt{2}$，当P既不与C重合也不与B重合时，$\frac{PA+PC}{PD}=\sqrt{2}$是否成立？请证明你的结论。



（图1）

教学重构策略：

问题链设计：将原题拆解为"基础证明→特殊验证→一般探究"三阶问题链；

认知脚手架：设计"几何画板动态演示→学案导图→小组互评"支持系统。

3.2 课堂实施与思维生长

环节一：问题拆解与直观分析

学生困惑：“如何从复杂图形中找到突破口？”

教师引导：（1）明确条件：BD为直径→圆内接四边形对角互补；BD2=BC・BE→相似三角形线索。（2）动态分析：点P在弧BC上的位置变化是否影响结论？

环节二：分层突破（问题1）

学生尝试：多数学生通过勾股定理或切线判定定理（DE与半径垂直）猜测DE为切线。

思维障碍：如何构造垂直关系？

方法提炼：策略1（相似三角形）：由BD2=BC・BE推导△BCD∽△BDE，得∠BDE=∠BCD=90°（因BD为直径），故DE⊥BD，即DE为切线。策略2（代数计算）：坐标系中设点坐标，通过斜率乘积为-1验证垂直（高中向量知识，能力强的班级可以深入了解）。

环节三：开放探究（问题2）

特殊情形：当P与B或C重合时，$\frac{PA+PC}{PD}=\sqrt{2}$

一般情形：学生分组讨论，研究方法多样性。

方法1（截长补短）：延长PC至G使CG=CA，构造等腰直角三角形DGP，通过全等转化线段和。

方法2（旋转法）：将△APD绕点D旋转90°，利用正方形对称性证明$\frac{PA+PC}{PD}=\sqrt{2}$。

方法3（坐标法）：建立坐标系，设点坐标代数运算验证。（计算量过大，学生学会在有限的时间内找到最恰当合适的方法，学会取舍）。

学生生成：部分学生提出“构造角平分线”“利用托勒密定理”等新思路，教师引导其完善逻辑链。

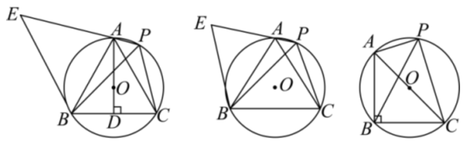
教师辅助：（1）学生在运用截长补短时，教师要注意引导$\frac{PA+PC}{PD}=\sqrt{2}$到$PA+PC=\sqrt{2}PD$的变形.在左侧开展“补短”操作时，存在四种不同类型的辅助线作法.学生们切不可将思维禁锢于某一种辅助线的添加方式，而应积极尝试其他做法，并对通过这些不同方法来证明全等或相似判定的手段进行归纳总结，洞悉其中的共通之处.借此，助力学生构建起从特殊情形推及一般规律的思维模式。（2）当学生运用“旋转”策略解题时，常常会涉及全等与相似的知识运用.在此过程中，图形的变换、角度与边长的重组都极为关键.教师应着重引导学生去探寻“旋转”与“截长补短”之间的内在联系，从辅助线的添加、

条件的转化等方面深入剖析，帮助他们打通不同解题思路与方法之间的壁垒，实现知识与技巧的融会贯通。

环节四：反思与拓展

变式训练：变式1（120°角平分线）：求证AB+AC=AD；变式2（90°角）：探究 $AB+AC=\sqrt{2}AD$；变式3（一般角）：推导线段比例关系。

拓展延伸：【探究】如图2，三角形 ABC 的外接圆为 $\odot O$，$\overset{\frown}{AC}$ 上有一动点 P，点 P 不与点 A、C 重合，连接 PA、PB、PC．



甲　乙　丙　（图2）

（1）如图2甲，连接 PA 并延长至点 E，连接 EB，若 $AD\perp BC$，且 AD 过圆心 O，$\angle ABE=\angle ACB$，证明：EB 是 $\odot O$ 的切线；（2）如图2乙，当三角形 ABC 是等边三角形，求证：$PB=PA+PC$。小明发现，延长 PA 至点 E，使 $AE=PC$，连接 BE，通过证明 $\triangle PBC\cong\triangle EBA$，可推得 $\triangle PBE$ 是等边三角形，进而得证。请你帮小明补全证明过程；

【应用】

（3）如图2丙，$\odot O$ 是VABC 的外接圆，$\angle ABC=90°$，$AB=BC$，点 P 在 $\odot O$ 上，且点 P 与点 B 在 AC 的两侧，连接 PA、PB、PC，若 $PB=2\sqrt{2}PA$，求 $\frac{PB}{PC}$ 的值。

思想升华：学生总结“截长补短法”的本质——通过几何变换将未知转化为已知。

3.3 技术支持与评价创新

动态演示：利用几何画板验证P点运动时的比值恒定性；

反思日志：学生撰写"我的解题突破点"，教师针对性指导。

4 案例评析

4.1 成效分析

学生反馈：通过多解法对比，85%的学生能独立完成问题1的证明，60%的学生掌握至少两种方法解决问题。

素养提升：学生在探究中体会到“从特殊到一般”“数形结合”的思想，逻辑推理能力显著增强。

4.2 创新点

一题多解，贯通知识：将截长补短、旋转、坐标法有机结合，打破学生思维定式[5]。

教学范式：构建"问题拆解→策略生成→变式创造"的三阶教学模式；

技术融合创新：开发"动态几何演示+代数验证"的双通道探究工具；

评价机制创新：设计"过程性量规+反思性日志"的复合评价体系。

变式链设计：通过角度的变化，引导学生发现几何问题中的不变规律，强化建模能力。

4.3 改进方向

辅助线教学：需增加专项训练，提升学生构造辅助线的信心；对于数学教材例题的发散变式研究需要增强。

4.4 政策契合

落实"双减"：通过一题多解减少重复训练，40分钟课堂解决传统2课时的内容；践行课标：精准对应"图形与几何"领域"探索与证明"学业要求（水平三）；立德树人：在攻坚克难中培养学生"敢质疑、善合作、勇创新"的科学精神。

5 结语

本文展示的几种解法各有特色，实现了从"解题教学"到"素养培育"的转型.未来将继续探索"以核心问题为锚点、以思维生长为主线、以技术赋能为支撑"的新型教学模式，为几何教学改革提供可复制的实践范本。

参考文献：

[1] 占书文.例谈立体几何综合问题的一题多解[J].数理天地(高中版),2025(9):38-39.

[2] 张继俊,任相丽.例析与圆中切线判定相关的几何综合问题[J].数理天地(初中版),2025(6):36-37.

[3] 邢万利.用多元化策略提升初中数学教学质量的探究[J].数理天地(初中版),2025(12):76-78.

[4] 蔡汉胜,远勋平.立足代数推理提升核心素养——以2024年广东省中考数学试卷第23题为例[J].初中数学教与学,2025,(16):46-49.

[5] 黄馨.中考数学题的一题多解及其对学生成绩的影响研究[J].数理天地(初中版),2025,(16):26-28.