

基于初等数论的整除判定方法研究

周根全

西安翻译学院 陕西 西安 710105

【摘要】：初等数论是数论的基础，整除理论又是数论的核心概念，同余概念运算与整除问题紧密相关。数论的起源与发展经历了一个漫长而曲折的过程，中外数学家均为数论做出了贡献。研究整除首先要理解整除的基本含义及其性质，这样才能把整除理论应用到解决实际问题中去。

【关键词】：初等数论；整除定义；整除性质；研究与应用

DOI:10.12417/2705-1358.25.17.067

数学是科学之王（高斯），是自然科学通用的语言和工具，是人类文化构成的要素之一，也是人类文化素质构成的要素之一。数论是数学之王（高斯），其研究对象是整数的性质，内容高度抽象而神奇，方法极其灵活而多变。

初等数论是数论的基础，主要用算术方法而非运算的角度研究整数的基本性质，其知识内容和思想方法，是数学思维链条中不可或缺的重要环节。

1 数论溯源

（1）西方数论思想与理论的形成

数论的起源，要追溯到公元前 500 多年。那时，人们在拥有了数的概念之后，自然会接触到数的一些性质。而第一个研究数的性质的学者，是古希腊著名哲学家毕达哥拉斯。

毕达哥拉斯学派秉持“万物皆数”的哲学思想，为探索自然的奥秘而研究数。他们将正整数分为奇数和偶数，研究了奇数和偶数的运算规律，提出了亲和数、完全数等概念，但是，他们对正整数的研究是出于占卜等宗教活动的需要，因此，具有浓厚的宗教神秘色彩，没有严格的概念定义和推理论证。

大约在公元前 300 年，古希腊另一位著名的数学家欧几里得把正整数的研究推向前进。在其著作《几何原本》中，首次给出了因数、倍数、质数、互质等基本概念的精确定义，并对所得到的结论进行了证明，从而使数论的研究严格化。

而且，欧几里得还发现质数在整数理论中的重要价值和基础地位。他不仅证明了关于自然数和质数之间的积性关系，还证明了质数个数的无穷性，提出了计算最大公约数的辗转相除法等等，使他的工作形成了初等数论的雏形。

公元 250 年前后，古希腊数学家丢番图为初等数论开辟了一片新天地-不定方程问题。他将自己的研究成果写成了一本《算术》，本书开启了中世纪的初等数论研究。

大约与此同时，中国也开辟了数论的另一个领域-同余理论。《孙子算经》中记载的“物不知数”问题，就涉及同余理论的研究。而我国南宋时期的数学家秦九韶所提出的“大衍求一术”，则比后来的高斯早了几百年，给出了具体且完备的一次同余方程组的方法。

到了 17 世纪初，一位法国业余数学家费马接过了初等数论研究的太旗。他的研究兼有欧几里得和丢番图的影子，提出了许多定理，最著名的是费马大小定理。

在 18 世纪末，数学家们发现，初等数论的研究似乎已成定局-整数的性质已经被研究得差不多了。然而，进入 19 世纪，与阿基米德（Archimedes）、牛顿（Newton）并称世界数学史上三位最伟大的数学家的德国数学家高斯发表了划时代的著作《算术研究》，又开辟了数论研究的新时代。在这本著作中，他不仅系统整理了这之前的数论中孤立的结果，而且详细阐述了自己的成果，给出了同余的标准记号和完整理论体系。到了 19 世纪 20 年代，高斯又着重研究了二次互反律。这是一个用于判别二次剩余，即二次同余方程之整数解的存在性定律。

数论在中国也卓有成效。从杨武之，到华罗庚、王元、陈景润等，都有非常卓越的成果与贡献。陈景润对于“1+2”的证明，就是运用解析数论的方法来完成的，这是目前世界上证明哥德巴赫猜想最好的结果。解析数论的创立，让许多初等数论中很难证明的定理变得简单，同时可以提出更多新的数论问题，让数论这门学科的生命力得以延续。

数论研究的最大收获不是解决了解决了多少实际问题，而是发现了看似不相关的数学领域存在着某种深刻、内在的联系，促进着现代数学的“大统一”，指导着未来数学的发展方向。

现代数论已经渗透到数学的许多分支学科和计算机等其他数学以外的学科。渗透与结合所产生的成果，已经被广泛应用于密码、信号、计算机性能检验等众多领域。

在数论中，还有许多看似简单实则非常困难的问题没有解决，如哥德巴赫猜想和黎曼猜想等，为了解决这些难题，数学家们曾经还必将作出不懈的努力，曾经还必将留下激动人心的成果和故事。

数论中的整除理论，具有悠久的历史，至少在公元前6世纪，毕达哥拉斯学派注视着沙滩上排列的鹅卵石，竟然发现了一种神秘规律：把石子能排列成完美对称的矩形时，他们称这两个数为“可整除”的伙伴。例如数字6的石子，既能排成 2×3 的矩形，也能排成 1×6 的长队——他们激动地称之为“完全数”，因为它的真因子之和 $(1+2+3)$ 恰等于自身。这种对整数内在结构的探索，揭开了人类系统研究整除性质的序幕。

整除理论是初等数论的基础，它是对在小学就学过的关于整除的算术，主要是涉及除法运算的内容，作抽象的、系统的总结，在讨论中不能涉及分数，这看起来似乎很简单，但是它的内涵是十分重要而深刻的。整除理论是初等数论的灵魂，它包括最大公约数理论和数学中最重要、最基本、最著名的定理之一——算术基本定理，即每个大于1的正整数必可唯一地表示为若干素数的乘积。

在《几何原本》第七卷中（约公元前300年），欧几里得以严谨的逻辑重构了整除理论。他提出著名命题：“若两数互素，则其最小公倍数等于乘积”这本质上基于整除的传递性。更里程碑式的是，他证明了“质数无穷多”——通过假设有限质数集，构造新数 $N = p_1 p_2 \cdots p_k + 1$ ，再证明必有质数整除 N 却不在原集中。这一思想实验的精妙，正依赖于整除的确定性。

公元4世纪的《孙子算经》抛出了“物不知数”问题：

“今有物不知其数，三三数之剩二，五五数之剩三，七七数之剩二，问物几何？”孙子发明了解决此类同余方程组的算法（后称“中国剩余定理”），其核心思想是寻找能被部分除数整除，同时满足特定余数的数。南宋秦九韶在《数书九章》中进一步系统化，发展出“大衍求一术”，这比欧洲高斯建立同余理论早了五百年。17世纪，费马在研读丢番图《算术》时，在页边写下著名的费马小定理：若 p 是质数， a 是整数，则 p 整除 $a^p - a$ ，但他未给出证明。一个世纪后，欧拉不仅证明了该定理，还将其推广至 ϕ 函数（欧拉定理）：若 a 与 n 互质，则 n 整除 $a^{\phi(n)} - 1$ 。这一成果揭示了质数模下的循环结

构，直接催生了现代密码学。

这段历史告诉我们：整除不仅是算术的基本法则，更是人类理解数字宇宙的钥匙——从古希腊的完美猜想，到中国的实用算法，再到近代的抽象证明，数学家们通过“能整除吗？”这一朴素追问，逐步揭开整数王国的维度，最终构建起数论这座宏伟殿堂。

（2）数论整除的原理分析

从概念理解来看，整除的定义虽看似简单，但这种抽象的表述几乎脱离了小学阶段具体的数字运算情景，让学生难以将其与以往的算术认知建立直接关联，难以真正领会其作为初等数论基础的深刻内涵。比如对于“完全数”中真因子之和等于自身这一概念，学生可能理解6这个例子，但要推广到对整数内在结构的探索层面，就显得力不从心。

在性质运用方面，整除的传递性、可加性、可乘性等性质，单独看每条都不复杂，但当需要综合运用这些性质解决问题时，学生往往不知如何下手。

对于整值函数整除问题，其证明过程涉及到各种变形技巧，如“倒项配对相加”、利用预备定理进行指数变换等，这些技巧具有很强的灵活性和技巧性，学生很难掌握其中的规律。

在同余与整除的结合部分，同余概念本身就较为抽象，让学生难以理解其与整除之间的内在联系。而且运用同余知识解决整除问题时，需要掌握同余的各种性质，如反身性、对称性、传递性等，并能熟练运用这些性质进行转化和推理。

数论中的整除不是简单的数字运算，而是具有严密的定义与性质且具有高度抽象化的理论问题，因此数论中的整除远超出我们常人的想象，有些实际问题看似简单，以至于大多数同学常常是“道理听得懂，问题想不通，畏难厌学时有发生”。如何运用整除理论研究实际问题，我们必须理解其相关的定义与性质。

2 数论的分析研究与应用

（1）抽象数字整除问题分析研究

案例分析：求证： $13 \mid \overline{abcabc} (a \neq 0)$

$\overline{abcabc}$ 表示某一个六位数的整数，核心为整除的论证分析与研判，由于整数中的各位数字并不知晓，故该问题属于抽象数字。

问题证明：因为

$$\overline{abcabc} = \overline{abc} \times 1000 + \overline{abc} = \overline{abc} \times 1001,$$

（2）整值函数整除问题分析研究

所谓整值函数,指自变量取任意整数时,函数值都是整数的函数。例如, $f(n)=3n^2+7n-8$, $f(n)=8^n-9^n$, $f(a,b)=a^2-b^2$ 等都是整值函数。当自变量取定一个具体数值时,就能变化出一系列有趣的两个具体数值的整除问题。

案例分析:设 n 为正整数, k 为正奇数,求证:

$$(1+2+\cdots+n)(1^k+2^k+\cdots+n^k)$$

问题证明:

“倒项配对相加”可得

$$\begin{aligned} & 2(1^k+2^k+\cdots+n^k) \\ &= (1^k+n^k)+[2^k+(n-1)^k]+\cdots+(n^k+1^k), \end{aligned}$$

各项均可被 $n+1$ 整除,

$$\text{故 } (n+1) \mid 2(1^k+2^k+\cdots+n^k).$$

$$\begin{aligned} & 2(1^k+2^k+\cdots+n^k) \\ \text{同理} &= [1^k+(n-1)^k]+[2^k+(n-2)^k]+\cdots+[(n-1)^k+1^k]+2n^k, \end{aligned}$$

各项均可被 n 整除,故 $n \mid 2(1^k+2^k+\cdots+n^k)$ 。

因为 $(n, n+1)=1$ (互质)

$$\text{故 } n(n+1) \mid 2(1^k+2^k+\cdots+n^k) \Rightarrow \frac{n(n+1)}{2} \mid (1^k+2^k+\cdots+n^k).$$

$$\text{即 } (1+2+\cdots+n)(1^k+2^k+\cdots+n^k).$$

(3) 整除与同余问题分析研究

同余是数论特有的概念和方法,是初等数论的核心内容,运用同余知识可以绕过除法运算,直接而简捷地解决很多困难

问题。同余具有很多性质,包括反身性、对称性、传递性、可加性、可乘性以及可约性等,这些性质在论证分析问题中具有重要的应用。在此我们不妨以具体问题的分析,理解同余与整除之间的内在关系。

$$\text{案例分析:求证: } 641 \mid (2^{2^5}+1).$$

本题题意是要证明正整数641能否整除 $2^{2^5}+1$,如果

运用整除定义来证明不但麻烦,而且无法从 $2^{2^5}+1$ 找到641的因数,因此用同余概念来论证,使问题变得比较容易。

问题分析:

欲证 $641 \mid (2^{2^5}+1)$,只要证明 $2^{2^5} \equiv -1 \pmod{641}$ 即可。

$$2^{2^5} = 2^{32} = 256^4 = 65536^2 \equiv 154^2 =$$

$$\text{因为 } 23716 \equiv -1 \pmod{641},$$

$$\text{即 } 2^{2^5} \equiv -1 \pmod{641}, \text{ 所以 } 641 \mid (2^{2^5}+1).$$

通过以上问题的分析,我们发现数论中的整除问题远超出一般数字的除法运算,具有高度的抽象性和趣味性。只要准确把握整除的核心定义,做好问题的分析研究,才能达到预期的效果。

参考文献:

- [1] 李同贤.初等数论[M].上海:复旦大学出版社,2022.
- [2] [德]卡尔·弗里德里希·高斯,算术研究[M].重庆:重庆出版社,2024.
- [3] 杨承清.九章算术[M].北京:中国纺织出版社,2020.
- [4] 王元.初等数论[M].北京:人民教育出版社,2003.
- [5] 张玉洁,吴小梅.《初等数论》课程项目化学习模式的探索——以整除理论为例[J].产业与科技论坛,2024,23(03):178-180.