思维可视化助力高中数学问题解决教学研究
——以“正弦型函数的性质与图像”为例

梁儒子　王泓娜

辽宁师范大学数学学院 辽宁 大连 116033

【摘　要】：随着核心素养导向的课程改革深化，思维可视化工具为高中数学课堂教学提供了新的问题解决路径。通过信息技术、问题链等可视化手段，以数学模型为支架创设思维节点，从认知问题、建立模型、创建路径三个环节凸显思维过程、外显认知路径，有效提升学生的问题解决能力，实现素养的发展。

【关键词】：问题解决；思维可视化；高中数学；课堂教学

DOI:10.12417/2705-1358.25.17.028

数学家哈尔莫斯提出，“数学真正的组成部分是问题与解，问题是数学的心脏”，波利亚认为数学是一门问题解决的学科。在教学过程中，教师总会面临如何将抽象的数学概念、复杂的问题解决过程、思维过程有效呈现，从而提升教师的教学效果，学生的学习效果的难题。为了使学生“看见”思维路径的搭建过程，可以借助信息技术与思维可视化手段，创设思维节点，以数学模型为支架建立“可见形式”与“抽象形式”的直接联系，为学生理解概念创设情境，为学生探索规律启发思路，为学生问题解决提供直观。

1 问题解决与思维可视化的内涵

1.1 问题解决

“问题解决”于教师而言是一种教学方式，于学生而言是一种学习形式，共同的特征都是以“问题”为载体进行教与学的活动[1]。信息加工心理学家认为“问题”是给定信息和目标状态之间有些障碍需要加以克服的刺激情境[2]。可见问题产生于情境，并且有三个基本成分，即已知条件，既定目标，过程阻碍。迈耶指出问题解决发生于问题解决者的认知系统内部，包含问题解决者对知识的操作与应用，其过程是可指导的，需要问题解决者尝试达到若干目标[3]。因此问题解决可以理解为从最原始的问题出发，历经不同子问题，运用一定策略将问题正确表征，最终获得解决的认知过程。

1.2 思维可视化

思维可视化是将人脑思想层中看不见却真实存在的东西（如思维轨迹、结构等），通过某些手段、方式清晰直观呈现出来的过程。思维可视化不是为了画图而画图，而是为了解决具体的问题，实现学生思维的进阶[4]。教师可以通过问题链、图示（如思维导图、概念图）等方式将学生内隐、动态、个性化的思维轨迹外显。

2 问题解决教学路径架构

问题解决教学的实质在于引导学生根据具体情境和目标，通过认知操作和思维活动，建立完整、严密的推理路径，消除目标状态与初始状态之间的差异。这一过程好比在河的两岸造桥，应先确定起固定支撑作用的支点，再按照一定的逻辑关系由点成线，形成完整路径。因此在课堂教学中教师应当立足学生的思维起点创设合适的问题情境，以数学模型为思维支架，通过认知问题、建立关系、创建路径三个环节（图 1），实现问题解决。

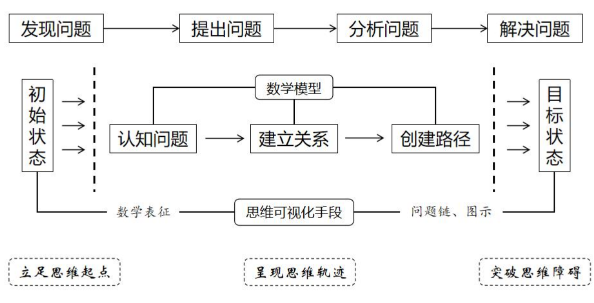

图 1 问题解决课堂教学流程

作者简介：一作：梁儒子（2001.2），女，汉族，辽宁师范大学数学学院硕士研究生，研究方向：数学教育；
二作：王泓娜（1979.7），女，汉族，辽宁师范大学数学学院副教授，硕士生导师，研究方向：数学教育测量与教育统计。
课题项目：辽宁师范大学“本硕一体生”教师教育类研究资助项目：指向问题解决的数学思维可视化课堂教学策略研究（编号：ZSJSJY202419）；辽宁师范大学教改项目：大概念视角下初中数学大单元教学设计实践研究（编号：203040272314）。

3 问题解决路径的设计与实施

3.1 立足思维起点，促使认知问题的过程可视化

情境不是引子，不是跳板，而是探究的对象，在于唤醒学生的已有认知，激活知识储备[5]。作为新课导入的问题情境应当立足学生的思维起点，与学生的已有认知建立联系。章建跃教授指出，在繁杂的周期现象中，匀速圆周运动最为典型[6]，因此选取贴近学生生活，并且在学习正弦函数时出现过的摩天轮模型作为原始问题情境："如何刻画座舱 P 随时间 x 变化距离地面的相对高度"，构建前后一致，逻辑连贯的学习过程。

3.1.1 问题情境的数学表征

对于数学问题中一些未被分解、转化的原始问题，可以用数学符号、图形、文字等多种表征形式，建立已知信息和欲求目标的联系，尚不清楚解决问题的具体路径时,信息转译越丰富越好。如将"座舱 P 距离地面的相对高度"转译为数学语言，即"点 P 的纵坐标 y 与时间 x 的关系"。想要得到预期目标，学生不难发现影响座舱 P 高度的因素可能为半径、角速度、初始角以及圆心距离地面的高度。

3.1.2 动态情境的静态化分析

现实生活中选取的情境（如摩天轮情境）往往是动态发展的，可以利用信息技术手段（如 GeoGebra 软件）分析整个运动过程，并将其分解为若干个稳定的关键阶段或典型瞬间。

例如在分析点 P 坐标变化时，教师利用 GGB 软件依次改变圆的半径、角速度、初始角，学生不难得出点 P 的坐标由$(\cos x，\sin x)$依次变为$(A\cos x，A\sin x)$、$(A\cos\omega x，A\sin\omega x)$、$(A\cos(\omega x+\phi)，A\sin(\omega x+\phi))$。这一过程不仅将现实问题抽象成数学模型,还揭示了$y=A\sin(\omega x+\phi)$可以由$y=\sin x$动态生成，将单位圆上点的运动推广为一般的匀速圆周运动。

3.2 呈现思维轨迹 促使建立关系的过程可视化

"建立关系"是指通过分析数学模型的表现结果、影响因素，选择一定的认知角度，建立各要素之间定量或定性的关系，这一过程主要分为呈现认知角度和建立核心关系两个阶段。

3.2.1 图表结合 呈现认知角度

认知角度能够反映个体在理解或分析事物时所采用的特定思维框架或视角。学生的不同认知水平会导致对待同一问题会产生不同的认知角度。如问到"如何研究三个参数 A、ω、φ 对函数$y=A\sin(\omega x+\phi)$影响？"学生会产生如下三种认知角度：

认知角度一：先用五点法画出几个特殊函数的图像，再根据图像研究函数的性质；认知角度二：先分析$y=\sin(x+\phi)$，再分析$y=\sin(\omega x+\phi)$，最后探究$y=A\sin(\omega x+\phi)$；认知角度三：分别研究三个参数对$y=A\sin x$、$y=\sin(x+\phi)$、$y=\sin\omega x$的影响，再研究两个参数对函数的影响，最后归纳整合。

针对学生的不同认知角度。教师可以建构概念图、表格等形式直观呈现，这也为建立关系过程的可视化奠定基础。

3.2.2 据理列式 建立核心关系

解决一个复杂的问题往往涉及多个环节，每个环节之间存在平行或交叉关系，教师需要引导学生选择合适的认知角度，分析问题本质特征，建立最核心的关系式。

教师带领学生分析三种认知角度，发现认知角度三先厘清每个参数对函数的影响，再归纳整合，学生可以更加明确每一个参数如何影响函数。三角函数刻画的是动点在单位圆上的位置变化关系，借助三角函数线中的正弦线，学生已经明确单位圆中 sinx 的绝对值表示动点到 x 轴的竖直距离，取值范围为[0,半径]，此时半径为 1。改变半径大小，点 P 到 x 轴的竖直距离仍为[0,半径]。故引入参数 A 表示圆的半径，不改变其余因素时，A 的变化仅影响函数值的取值范围。当改变点 P 的起始位置φ大小时，点 P 到达最值点、零值点时的 x 值改变，即到达最值点和零值点所用时间不同，但只要ω不变，点 P 旋转一周所用时间不发生改变。当改变点 P 的角速度ω，P 旋转一周所用的时间发生改变，间接影响了点 P 到达最值点、零值点的 x 取值。因此参数之间 A 独立影响函数，ω、φ之间相互关联。故建立"先分而治之，再归纳整合"的核心关系（图 2）。

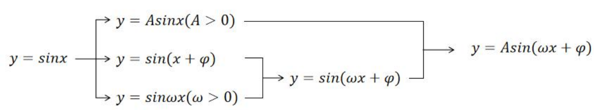

图 2 核心关系

3.3 把握思维障碍，创建问题解决路径的过程可视化

3.3.1 注重问题设置，关注知识生成

问题解决路径的创建就是将已知信息、核心关系、欲求目标三者用数学知识、方法按照一定逻辑关系联系起来。教师可以遵循整体性、层次性、指向性以及生长性原则[1]设置层次递进的问题，每个问题对应一个思维节点，形成思维阶梯，学生在问题解决过程中不断思考，构建解决问题的完整路径。

其次问题组的设置不仅体现问题解决的完整路径，同时也用于暴露学生的思维障碍。本节课的重点在于类比正弦函数的研究过程研究正弦型函数的性质与图像，而五点法作图关键点的选取以及函数的周期是本节课的难点，也是学生容易出错的地方。因此在探究参数对$y=A\sin(\omega x+\phi)$的影响时，每一环节都增加追问"P 在旋转过程中经过哪些关键点"，这为探

究“五点法”画图埋下伏笔。如探究参数φ对函数的影响时，让学生在坐标系中画出 $y=\sin(x+\frac{\pi}{3})$的图像，部分学生会选择让 x 取 0，$\frac{\pi}{2}$，π，$\frac{3\pi}{2}$，2π为五个关键点。对于学生的误区、思维障碍，教师利用 GGB 软件、板书留痕等可视化手段，引导学生将角 x，x+φ，ωx+φ看成一个整体角，观察终边 OP 所经过的特殊位置，利用 GGB 软件中“点的轨迹追踪”功能生成函数图像，学生不难发现当整体角经过 0，$\frac{\pi}{2}$，π，$\frac{3\pi}{2}$，2π才是关键位置，而此时关键点位于函数的波峰、波谷以及零点处，因此关键点是“函数值 y”发生变化的特殊位置，而不是自变量 x，从而有效突破教学难点。

3.3.2 记录思维节点，突破思维障碍

问题解决路径中的支点是逻辑推理的产物，也是思维的载体。思维节点好比问题解决路径中的一块块“过河石”,是思考过程中的关键点或连接点，因此要及时记录思维节点。如在探究不同参数对函数图像的影响时，教师让学生将每一次所选取的五个关键点汇总在表 1 中，并保留做题痕迹。通过记录问题解决过程中的思维节点，让学生不断领悟参数对函数的影响以及五点法画图的关键。

表 1 正弦型函数五点法绘图及特征小结

函数值 / x / 函数	0	A	0	−A	0	平移量	周期
$y=\sin x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	0	2π
$y=A\sin x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	0	2π
$y=\sin(x+\varphi)$	$0-\varphi$	$\frac{\pi}{2}-\varphi$	$\pi-\varphi$	$\frac{3\pi}{2}-\varphi$	$2\pi-\varphi$	左移φ	2π
$y=\sin\omega x$	0	$\frac{\pi}{2\omega}$	$\frac{\pi}{\omega}$	$\frac{3\pi}{2\omega}$	$\frac{2\pi}{\omega}$	0	$\frac{2\pi}{\omega}$
$y=\sin(\omega x+\varphi)$	$0-\frac{\phi}{\omega}$	$\frac{\frac{\pi}{2}-\phi}{\omega}$	$\frac{\pi-\phi}{\omega}$	$\frac{\frac{3\pi}{2}-\phi}{\omega}$	$\frac{2\pi-\phi}{\omega}$	左移$\frac{\phi}{\omega}$	$\frac{2\pi}{\omega}$
$y=A\sin(\omega x+\varphi)$	$0-\frac{\phi}{\omega}$	$\frac{\frac{\pi}{2}-\phi}{\omega}$	$\frac{\pi-\phi}{\omega}$	$\frac{\frac{3\pi}{2}-\phi}{\omega}$	$\frac{2\pi-\phi}{\omega}$	左移$\frac{\phi}{\omega}$	$\frac{2\pi}{\omega}$

4 结语

以数学模型为思维支架，结合思维可视化手段，能够有效提升高中生的问题解决能力，发展其数学思维。通过认知问题、建立关系、创建路径三个环节，学生能够将抽象的数学问题转化为具体的、可操作的思维路径，从而在复杂问题解决中游刃有余。

参考文献：

[1] 胡云飞.促进核心素养发展的问题解决教学——以“向量的概念及表示”为例[J].数学通报,2022,61(03):18-21.

[2] 程汉波,朱华伟.数学问题解决研究综述[J].数学通讯,2024,(14):1-6+24.

[3] 徐斌艳.数学教育展望[M].上海:华东师范大学出版社,2003.121.

[4] 赵国庆,杨宣洋,熊雅雯.论思维可视化工具教学应用的原则和着力点[J].电化教育研究,2019,40(09):59-66+82.

[5] 安文华.埋伏笔于情境化难点于无形——也谈“函数 y=Asin(ωx+φ)的性质与图像”[J].数学通报,2022,61(08):30-32+45.

[6] 章建跃.用几何直观和代数运算的方法研究三角函数[J].数学通报,2020,59(11):4-13+57.