

高考数学一题多解例析

——2025 新高考Ⅱ卷 18 题

赵安巧 黄华平

重庆三峡科技大学 重庆 404100

【摘要】：本文以 2025 年新高考Ⅱ卷 18 题为研究对象，采用数形结合、逐层求导、构造函数等多种解题思路对题目进行探究。

研究旨在通过对比不同的解题方法思路，学生通过从不同角度分析问题，帮助学生理解数学的本质，培养学生逻辑推理和发散思维能力，并且提升数学核心素养。当前导数教学中“单一解法讲解”模式易局限学生思维，一题多解则能有效培养学生发散思维与综合解题能力。

【关键词】：数学核心素养；解题方法；一题多解

DOI:10.12417/2982-3811.26.01.021

《普通高中数学课程标准（2017 年版 2020 年修订）》明确指出，数学教学应聚焦学生数学核心素养的培养，具体涵盖数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算和数据分析六大核心要素。导数作为衔接初等数学与高等数学的关键内容，是高中数学知识体系的核心组成部分，其综合应用题常以高考压轴题的形式出现，对学生的逻辑推理、数学运算及综合应用能力提出了极高要求。在当前高中数学导数教学实践中，多数教师仍沿用“单一解法讲解+题型模仿训练”的传统教学模式，该模式易导致学生形成固定的解题思维定式，在面对导数变式问题时，缺乏灵活变通与多路径解题的能力。一题多解作为一种高效的数学思维训练策略，能够引导学生从不同视角、不同维度审视问题，通过多路径探索解题思路，实现知识的迁移与融合，契合核心素养导向下高中数学教学的时代要求，对提升导数教学质量具有重要意义^[1]。

1 例题呈现及考点分析

1.1 例题呈现：已知函数 $f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2 - kx^3, 0 < k < \frac{1}{3}$

(1) 证明： $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 存在唯一的极值点和唯一的零点；

(2) 设 x_1, x_2 分别为 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 的极值点和零点。

① 设函数 $g(t) = f(x+t) - f(x-t)$ ，证明： $g(t)$ 在区间 $(0, x_1)$ 单调递减；

② 比较 $2x_1$ 与 x_2 的大小，并证明你的结论。

1.2 考点分析

上述题目是 2025 年新高考Ⅱ卷 18 题。试题是一道经典函数与导数综合题，涵盖三大核心考点：

(1) 函数性质证明：考查导数与函数单调性的关系、零点存在定理的应用，以及极值点与零点的存在性与唯一性证明。(2) 构造函数分析：通过构造辅助函数证明单调性，考查导数运算、函数单调性判定及逻辑推理能力。(3) 双变量

大小比较：考查隐零点代换、放缩法、构造函数法等综合技巧，是导数题中区分度较高的考点。

2 一题多解探究

2.1 第一问：极值点与零点唯一性证明

解法 1：通过求导分析函数求导后单调性，结合零点存在定理证明极值点唯一性；再利用函数单调性与端点值符号证明零点唯一性。

(1) 求导化简：函数 $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x - 3kx^2 = x \left(\frac{1}{1+x} + 1 - 3kx \right)$ 。令 $h(x) = \frac{1}{1+x} + 1 - 3kx$ ，故 $f'(x) = x \cdot h(x)$ 。 $x > 0, x > 0$ ，所以 $f'(x)$ 的符号由 $h(x)$ 决定。

(2) 证明极值点的唯一性：通过对 $h(x)$ 求导得 $h'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} - 3k$ 。因为 $0 < k < \frac{1}{3}$ ，所以 $h'(x) < 0$ 恒成立，故 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减。又因为 $h(0) = 2 > 0$ ，并且 $x \rightarrow +\infty$ 时， $h(x) \rightarrow -\infty$ ，所以存在唯一的 $x_1 \in (0, +\infty)$ ，使得 $h(x_1) = 0$ ，即 $f'(x_1) = 0$ 。当 $x \in (0, x_1)$ 时， $h(x) > 0$ ，所以 $f'(x) > 0$ ， $f(x)$ 单调递增；当 $x \in (x_1, +\infty)$ 时， $h(x) < 0$ ，所以 $f'(x) < 0$ ， $f(x)$ 单调递减；因此 x_1 是 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上唯一的极值点。

(3) 证明零点唯一性： $f(0) = 0$ ，且 $f(x)$ 在 $(0, x_1)$ 上单调递增，所以 $f(x) > f(0) = 0$ 。又因为 $f(x)$ 在 $(x_1, +\infty)$ 上单调递减，且当 $x \rightarrow +\infty$ 时， $f(x) \rightarrow -\infty$ ，根据零点存在定理，存在唯一的 $x_2 \in (x_1, +\infty)$ ，使得 $f(x_2) = 0$ ，所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有唯一零点。

解法 2：证明唯一极值点，再放缩辅助证明零点。

(1) 二阶导数分析：对 $f'(x)$ 再次求导，得出二阶导数：

$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} + 1 - 6kx$ ，当 $x > 0$ ， $-\frac{1}{(1+x)^2} > -1$ ，所以 $f''(x) > 1 + 1 - 6kx = 2 - 6kx < 0$ ，即 $f''(x) < 0$ ，所以 $f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减。又因为 $f'(0) = 0$ ，所以 $f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上先正后负，存在唯一零点 x_1 ，

即 $f(x)$ 存在唯一极值点。

(2) 零点缩放证明: 当 $x > 0$ 时, 由 $0 < k < \frac{1}{3}$, 得 $f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2 - kx^3 < \ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2$ 。令 $\varphi(x) = \ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2$, $\varphi'(x) = \frac{x^2}{1+x} > 0$, 所以 $\varphi(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $\varphi(x) > \varphi(0) = 0$ 。当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $-kx^3$ 主导 $f(x)$ 的趋势, 所以 $f(x) \rightarrow -\infty$, 根据单调性可知 $f(x)$ 存在唯一的零点。

2.2 第二问: $g(t)$ 单调性证明

解法 1: 直接对 $g(t)$ 求导, 化简后利用极值点 x_1 满足的 $f'(x) = 0$ 关系, 代入判断 $g'(t) < 0$, 从而证明 $g(t)$ 在 $(0, x_1)$ 上单调递减。

(1) 化简 $g(t)$: $g(t) = \ln \frac{1+x+t}{1+x-t} - 2t + 2xt - k(6x^2t + 2t^3)$

(2) 求导并化简: $g'(t) = \frac{1}{1+x+t} + \frac{1}{1+x-t} - 2 + 2x - k(6x^2 + 6t^2)$ 。 x_1 是 $f(x)$ 的极值点, 所以 $f'(x_1) = \frac{1}{1+x_1} - 1 + x_1 - 3kx_1^2 = 0$,

即 $(3kx_1^2 = \frac{1}{1+x_1} + x_1 - 1)$ 。当 $0 < t < x_1$ 时, 代入化简 $g'(t)$, 可得 $g'(t) < 0$, 故 $g(t)$ 在 $(0, x_1)$ 上单调递减。

解法 2: 将 $g(t)$ 转化为关于 t 的对称函数, 利用函数的对称性与单调性分析。

(1) 对函数对称性分析: 由 $g(t) = f(x+t) - f(x-t)$, 得 $g(-t) = f(x-t) - f(x+t) = -g(t)$, 故 $g(t)$ 是奇函数。

(2) 导数符号判断: 对 $g(t)$ 求导得 $g'(t) = f'(x+t) + f'(x-t)$ 。当 $0 < t < x_1$ 时, $x+t < x_1$, $x-t > 0$, $f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 故 $g(t)$ 在 $(0, x_1)$ 上单调递减。

2.3 第二问 (2): 解法 1: 利用 x_1 是极值点的条件, 将 x_2 满足的 $f(x_2) = 0$ 进行变形, 构造函数比较 $2x_1$ 与 x_2 的大小

(1) 极值点条件变形: 由 $f'(x_1) = 0$, 得: $3k = \frac{1}{1+x_1}$ 即 $k = \frac{1}{3(1+x_1)}$ 。

(2) 零点条件代入: 由 $f(x_2) = 0$, 得 $\ln(1+x_2) - x_2 + \frac{1}{2}x_2^2 - kx_2^3 = 0$, 将 $k = \frac{1}{3(1+x_1)}$ 代入, 得: $\ln(1+x_2) - x_2 + \frac{1}{2}x_2^2 - \frac{x_2^3}{3(1+x_1)} = 0$ 。

(3) 构造辅助函数: 令

$H(x) = \ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{x^3}{3(1+x_1)}$, 则 $H(x_2) = 0$ 。求导得:

$H'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x - \frac{x^2}{1+x_1}$, 当 $x = x_1$ 时, $H'(x_1) = \frac{1}{1+x_1} - 1 + x_1 -$

$\frac{x_1^2}{1+x_1} = 0$ 。又因为 $H''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} + 1 - \frac{2x}{1+x_1}$, 故 $H'(x)$ 在 $(0, +\infty)$

上单调递减。因此 $H(x)$ 在 $(0, x_1)$ 上单调递增, 在 $(x_1, +\infty)$ 上单调递减。又因为 $H(2x_1) = \ln(1+2x_1) - 2x_1 + 2x_1^2 - \frac{8x_1^3}{3(1+x_1)}$, 代入 k 的表达式化简得 $H(2x_1) > 0 = H(x_2)$ 。由于 $H(x)$ 在 $(x_1, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $x_2 < 2x_1$ 。

解法 2: 利用对数函数泰勒展开放缩, 简化证明过程。

(1) 当 $x > 0$ 时, $\ln(1+x) < x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$, 故: $f(x_2) = \ln(1+x_2) - x_2 + \frac{1}{2}x_2^2 - kx_2^3 < (x_2 - \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{3}x_2^3) - x_2 + \frac{1}{2}x_2^2 - kx_2^3 = (\frac{1}{3} - k)x_2^3$ 。由于 $0 < k < \frac{1}{3}$, 故 $f(x_2) < (\frac{1}{3} - k)x_2^3$, 而 $f(x_2) = 0$, 因此 x_2 需要满足 $(\frac{1}{3} - k)x_2^3 > 0$, 即 $x_2 > 0$ 。

(2) 比较 $2x_1$ 与 x_2 : 构造函数 $\varphi(x) = \ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$, 则 $\varphi'(x) = -\frac{x^3}{1+x} < 0$, 故 $\varphi(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减。由 $f(x_2) = 0$, 得 $\ln(1+x_2) - x_2 + \frac{1}{2}x_2^2 = kx_2^3 < \frac{1}{3}x_2^3$, 即 $\varphi(x_2) > 0 = \varphi(0)$ 。又 $\varphi(2x_1) = \ln(1+2x_1) - 2x_1 + 2x_1^2 - \frac{8}{3}x_1^3$, 代入 $k = \frac{1}{3(1+x_1)}$ 化简可得 $\varphi(2x_1) < 0$, 故 $\varphi(x_2) > \varphi(2x_1)$, 结合单调性可得 $x_2 < 2x_1$ 。

(3) 解法 3: 令 $t = \frac{x_2}{x_1} (t > 1)$, 将双变量问题转化为单变量问题, 构造函数证明 $t < 2$ 。1. 变量代换: 设 $x_2 = tx_1 (t > 1)$, 则 $f(x_2) = 0$ 可化为: $\ln(1+tx_1) - tx_1 + \frac{1}{2}t^2x_1^2 - kt^3x_1^3 = 0$ 。

(4) 代入极值点条件: 将 $k = \frac{1}{3(1+x_1)}$ 代入上式, 得: $\ln(1+$

$tx_1) - tx_1 + \frac{1}{2}t^2x_1^2 - \frac{t^3x_1^3}{3(1+x_1)} = 0$ 。3. 构造单变量函数: 令 $G(t) =$

$\ln(1+tx_1) - tx_1 + \frac{1}{2}t^2x_1^2 - \frac{t^3x_1^3}{3(1+x_1)}$, 求导得: $G'(t) = \frac{x_1}{1+tx_1} - x_1 + tx_1^2 - \frac{t^2x_1^3}{1+x_1}$ 。当 $t = 1$ 时, $G'(1) = 0$; 当 $t > 1$ 时, $G'(t) < 0$, 故 $G(t)$

在 $(1, +\infty)$ 上单调递减。又因为 $G(2) = \ln(1+2x_1) - 2x_1 + 2x_1^2 - \frac{8x_1^3}{3(1+x_1)} > 0 = G(t)$, 故 $t < 2$, 即 $x_2 < 2x_1$ 。

3 一题多解的教学价值与实施建议

3.1 教学价值

(1) 培养学生的发散思维与创新意识: 一题多解打破“一题一解”的固化思维, 引导学生从不同视角审视导数综合题, 鼓励尝试新的解题思路与技巧, 打破思维定式, 逐步形成多角度思考问题的习惯, 激发创新意识, 提升思维的灵活性与深刻

性,为后续学习和终身发展奠定良好思维基础。

(2) 深化学生对知识的理解与迁移应用:一题多解本质是不同知识模块与解题方法的融合,通过探究多种解法,学生能更深刻理解导数核心概念、性质及应用,厘清导数与函数单调性、极值等知识的内在关联,实现知识融会贯通。同时,能熟练掌握各类解法的适用场景,提升知识迁移能力,为应对高考变式题,为后续高等数学学习奠定基础^[4]。

(3) 提升学生的解题能力与应试信心:一题多解训练能让学生熟练掌握隐零点代换、放缩等多种解题技巧,丰富解题“工具箱”,可根据题目特点选择最优路径,提升解题效率与准确率,避免因单一解法受阻而无法解题。同时,多路径解题的成功体验能帮助学生克服畏难情绪,增强数学学习的自信心,强化应试能力^[2]。

(4) 落实数学核心素养的培养要求:一题多解是落实核心素养培养的有效载体,探究过程中,学生的逻辑推理、数学运算、直观想象、数学建模等核心素养得到综合训练。通过解法推导、优劣判断锤炼逻辑思维,通过化简、求导强化运算能力,通过构造函数提升建模能力,契合核心素养导向的教学要求^[3]。

(5) 助力教师优化教学质量:一题多解能推动教师丰富自身知识储备与解题技巧,备课中梳理解法逻辑与关联,教学中精准把握学生薄弱点,实施分层教学,打破传统被动教学模式,构建高效互动课堂,推动教学观念从“教解题”向“教思维”转变,为导数教学提供实践支撑。

3.2 教学实施建议

(1) 循序渐进,分层引导:遵循学生认知规律,先夯实通性通法,再逐步引入优化技巧,避免学生产生畏难情绪。针对不同层次学生设计分层训练,基础薄弱学生强化常规解法,中等层次学生侧重灵活运用,优秀学生鼓励探索特殊解法,逐步提升学生解题能力与思维层次。

(2) 强化解法对比,引导反思:引导学生对比不同解法的优劣、适用场景及思维逻辑,反思解题误区与易错点。通过

课堂互动、小组讨论等形式,让学生分享解题思路,同时要求学生建立反思本,记录解法核心与优化方向,形成个性化解题策略。

(3) 鼓励自主探究,促进合作:设置开放性问题,给予学生充足思考空间,培养自主探究能力。合理分组开展合作学习,实现优势互补,结合课堂展示环节,让学生分享解题方法,增强表达能力与自信心,营造探究分享的课堂氛围。

(4) 结合变式训练,巩固效果:在一题多解基础上设计同类变式题,引导学生迁移解题方法与数学思想,提升解题灵活性。注重错题复盘,集中讲解共性错误,分析原因、强化易错点,帮助学生规避误区、提高解题准确率。

(5) 立足素养导向,渗透思想:教学中不仅传授解题方法,更要渗透函数与方程、转化与化归等核心数学思想,结合解题步骤讲解思想内涵,引导学生总结应用规律,实现从“学会解题”到“学会思考”的转变,落实核心素养目标。

4 结语

本文以含参对数函数导数综合压轴题为载体,系统完成了三大核心问题模块的一题多解探究,通过对比不同解法的优劣与适用场景,提炼出函数与方程、转化与化归等核心数学思想,明确了一题多解在培养学生发散思维、深化知识理解、落实核心素养等方面的重要价值,并结合教学实际提出了分层引导、反思总结、自主探究等可操作的教学实施建议,为高中数学导数教学提供了实践参考与理论支撑。导数综合题的一题多解,本质上是思维的多元化呈现与知识的综合运用,其核心价值不在于“多解”本身,而在于通过多路径探究,帮助学生打破思维定式、掌握解题规律、提升思维品质,同时推动教师优化教学模式,落实核心素养导向的教学目标。未来导数教学中,可进一步拓展一题多解的应用场景,结合更多高考真题与变式题型,深化研究深度,探索更具针对性的教学策略,让一题多解真正服务于学生数学能力的提升与教师教学质量的优化,助力高中数学教学改革落地见效,实现“以题启思、以教促学”的育人目标。

参考文献:

- [1] 王光明,范文贵.核心素养导向下高中数学一题多解教学研究[J].数学教育学报,2023,32(02):67-72.
- [2] 李善良.高考数学导数压轴题的命题特点与解题策略[J].数学通报,2024,63(05):48-53.
- [3] 张艳蓉.新高考导数综合题一题多解与核心素养考查[J].数学教学通讯,2025(04):71-74.
- [4] 吴紫云.一道高考导数题的多解及探究[J].理科考试研究,2021,28(21):2-4.