关于条件概率的公理化定义推导

董小娟

西安电子科技大学数学与统计学院 西安 710126

【摘 要】：条件概率是概率论与数理统计这门课程中一个非常重要且有用的概念，本文从概率的公理化定义出发，给出了条件概率定义的一个注解。以期让学生理解条件概率定义的本质，进而会灵活应用条件概率解决相关的复杂问题。

【关键词】：条件概率；概率测度；概率的公理化定义

DOI:10.12417/2982-3803.26.03.010

1 引言

条件概率是概率论与数理统计这门课程的一个重要基础概念，它不仅在建立乘法公式、全概率公式和贝叶斯公式等基本概念方面有重要的作用，同时可以简化复杂概率的计算；而且后继一些概念也是建立在条件概率的基础上，如指数分布的"无记忆性"，条件概率密度函数，假设检验中的"两类错误"，随机过程中的条件数学期望等等。因此从概率的公理化定义理解条件概率的本质很重要[1]。

在一般的教材或授课过程中，通常都是直接给出条件概率定义，然后借助于古典概型的例子验证该公式。条件概率的定义看起来并不复杂，学生虽然知道按照公式的形式可以计算条件概率，但因为没有掌握条件概率的本质含义，在应用该公式的过程中，对于比较复杂的概率计算，学生通常不能准确的找出事件 A 与 B，甚至有时分不清所求概率到底是两事件之间的条件概率还是积事件概率。文[2]对条件概率的定义从概率公理化的角度给出了说明，本文在文[1]的基础上，从概率公理化定义出发，对条件概率公式的形式给出全面系统的推导，希望学生能够真正理解条件概率的含义，进而能灵活运用条件概率解决复杂的概率问题。

本文第二部分给出条件概率的定义公式及其证明，第三部分给出两个应用条件概率的例子。

2 条件概率公式

2.1 条件概率的定义[3]

设 A 与 B 是样本空间中的两事件,若 P(B)>0,则称

$$P(A \setminus B)=\frac{P(AB)}{P(B)} \quad (1)$$

为"在 B 发生下 A 的条件概率"，简称条件概率。

2.2 条件概率在概率公理化定义下的推导过程[2]

为了在概率公理化的定义下得到公式(1)，我们不妨假设随机试验的样本空间为Ω，设 A 和 B 是样本空间的任意两个事件，且有$P(B)>0$。因为所求概率为在 B 发生下 A 的条件概率，则所求条件概率一定跟事件 A 和事件 B 发生的概率即 P(A)和 P(B)有关，不妨设存在函数 F,使得条件概率$P(A \setminus B)=F(P(A),P(B))$.下面证明这样的 F 是不存在的。特别取$P(A)=P(\overline{A})=P(B)=P(\overline{B})=\frac{1}{2}$,则有

$$1=P(B \setminus B)=F(P(A),P(B))=P(\overline{B} \setminus B)=0,$$

得到了矛盾，则表明条件概率只跟事件事件 A 和事件 B 发生的概率有关这一结论是错误的，即满足$P(A \setminus B)=F(P(A),P(B))$的函数 F 是不存在的。进一步表明条件概率$P(A \setminus B)$还和其它量有关。

既然求在 B 发生下 A 的条件概率，这意味着 A 和 B 都要发生，所以在条件概率的定义式中也应该考虑到概率$P(AB)$.为了由概率的公理化定义得到条件概率$P(A \setminus B)$与事件 A、B 和 AB 的概率的关系，下面做两点假设：

$P(A \setminus B)=0$，对任一属于$\overline{B}$的事件 A 都成立；

概率的相对大小不发生变化，即若设 A、C 是样本空间中任意两个与 B 相交的事件,则有$\frac{P(A \setminus B)}{P(C \setminus B)}=\frac{P(AB)}{P(CB)}$(2)

由公式（2）可见，一定存在某个常数α，使得$P(A \setminus B)=\alpha P(AB)$,为了求出常数$\alpha$,不妨设事件 B 和 C 相等，则由式（2）可得$P(A \setminus B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$,即$\alpha=\frac{1}{P(B)}$,这就得到了条件概率的定义公式。

上面的推导从概率的公理化定义出发得到了条件概率的定义公式，该过程揭示了条件概率的本质。即一般情况下，计算概率$P(A)$和$P(A \setminus B)$时，两者所考虑的样本空间不同，所以一般情况下这两个概率并不相等。

2.3 例子

下面我们通过例子分析$P(A)$和$P(A \setminus B)$的计算.

例 1[3]独立地抛掷两颗均匀的骰子，求解下列两个问题：

（1）两颗骰子的和等于 s 的概率；（2）当第二颗骰子的点数是 3 时，两颗骰子的和等于 s 的概率。分析：这是一道古典概型问题，所以先要找到随机试验和条件概率事件的样本空间及有利于我们事件的样本点的个数。

解:设A_s表示事件“独立地抛掷两颗均匀的骰子，它们的和等于s”,B 表示事件“第二颗骰子的点数是 3 的条件下，两颗均匀的骰子的和等于s”.

独立地抛掷两颗均匀的骰子，两者和为S这一随机事件的样本空间为Ω的样本点的个数为$C_6^1 \times C_6^1 = 36$，和S的所有可能取值为：2，3，4，5，6，7，8，9，10，11，12.

$P(A_2) = P(A_{12}) = 1/36$ ，$P(A_3) = P(A_{11}) = 2/36$ ，$P(A_4) = P(A_{10}) = 3/36, P(A_5) = P(A_9) = 4/36, P(A_6) = P(A_8) = 5/36$, $P(A_7) = 1/6$.

（2）接下来计算$P(A_s \setminus B)$，即已知第二颗骰子的点数是 3 的前提下，两颗骰子之和是s的概率.由于第一颗骰子的点数可能是 1,2,...,6 中的任何一个，因此两颗骰子之和必须在 4 和 9 之间取值.于是，当$s \leq 3$或$s \geq 10$时，$P(A_s \setminus B) = 0$，所以我们只考虑$4 \leq s \leq 9$的情况.

（3）首先注意到，由于掷出一个 3 的概率是$\frac{1}{6}$, 所以$P(B) = \frac{1}{6}$.当$4 \leq s \leq 9$时，$P(A_s \cap B)$是多少呢？对于每一个s，为了保证第一颗骰子的点数加上 3 之后等于s，第一颗骰子有且只有一种可能的取值.因此，在 36 对可能的结果中，每个A_s只包含其中的一对.即：A_4包含的结果是(1,3)，A_5包含的结果是(2,3)，A_6包含的结果是(3,3)，A_7包含的结果是(4,3)，A_8包含的结果是(5,3)，A_9包含的结果是(6,3).因此，对于每一个s，均有$P(A_s \cap B) = \frac{1}{36}$.把这些结果组合在一起，由上面的公式可得：当$4 \leq s \leq 9$时，条件概率$P(A_s \setminus B) = \frac{P(A_sB)}{P(B)} = \frac{1/36}{1/6} = 1/6$；否则为 0.

通过快速检验，我们可以看出这个结果是非常合理的.已知 B 发生的前提下，两颗骰子之和不可能小于 4 或大于 9，而剩下的 6 种可能情况应该是等可能的，这恰与上面的结果相吻合.注意，由解答（1）和（2）可知，概率$P(A_s)$和条件概率$P(A_s \setminus B)$的结果是不同的.

另一方面，在求解复杂事件的概率时，通常以条件概率为基础，综合应用乘法公式、全概率公式和贝叶斯公式解决问题，下面再看一个例子。

例 2 设有来自三个地区的考生的报名表分别为 10 份，15 份和 25 份，其中女生的报名表分别为 3 份，7 份和 5 份，随机地取一个地区的报名报，从中先后抽出 2 份。（1）求先抽到的 1 份是女生表的概率；（2）已知后抽到的 1 份是男生表，求先抽到的 1 份是女生表的概率；（3）已知先抽到的 1 份是女生表，后抽到的 1 份是男生表，求它们是第二地区的概率。

解：设$H_i(i = 1,2,3)$表示事件“抽到的报名表是第i地区的”，$A_j(j = 1,2)$表示事件“第j次抽到的是男生表”，

则 $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}$ ，$P(A_1 \setminus H_1) = \frac{7}{10}, P(A_1 \setminus H_2) = \frac{8}{15}, P(A_1 \setminus H_3) = \frac{20}{25}$,

由全概率公式，得$P(\overline{A}_1) = \sum_{i=1}^{3} P(H_i)P(\overline{A}_1 \setminus H_i) = \frac{1}{3}(\frac{3}{10} + \frac{7}{15} + \frac{5}{25}) = \frac{29}{90}$,

由“抽签原则“知，$P(A_2 \setminus H_1) = \frac{7}{10}, P(A_2 \setminus H_2) = \frac{8}{15}, P(A_2 \setminus H_3) = \frac{20}{25}$

由全概率公式，得$P(A_2) = \sum_{i=1}^{3} P(H_i)P(A_2 \setminus H_i) = \frac{1}{3}(\frac{7}{10} + \frac{8}{15} + \frac{20}{25}) = \frac{61}{90}$，则

$$P(\overline{A}_1 \setminus A_2) = \frac{P(\overline{A}_1 A_2)}{P(A_2)}$$

$$= \frac{1}{P(A_2)}[P(H_1)P(\overline{A}_1 A_2 \setminus H_1) + P(H_2)P(\overline{A}_1 A_2 \setminus H_2) + P(H_2)P(\overline{A}_1 A_2 \setminus H_2)]$$

$$= \frac{90}{61} \times [\frac{1}{3} \times \frac{3\times7}{10\times9} + \frac{1}{3} \times \frac{7\times8}{15\times14} + \frac{1}{3} \times \frac{5\times20}{25\times24}] = \frac{90}{61} \times \frac{2}{9} = \frac{20}{61}$$

$$P(H_2 \setminus \overline{A}_1 A_2) = \frac{P(H_2)P(\overline{A}_1 A_2 \setminus H_2)}{P(\overline{A}_1 A_2)} = \frac{\frac{1}{3}\times\frac{7\times8}{15\times14}}{\frac{2}{9}} = \frac{2}{5}$$

下面再举一个利用条件概率求解的典型例子---抓阄抓阄是否与次序有关?

例 3 现在有五个阄,其中两个阄内写着“有”字,三个阄内不写字,五人依次抓取,问各人抓到“有”字阄的概率是否相同?

解：设A_i表示“第i人抓到有字阄”的事件$i = 1,2,3,4,5$ 则有$P(A_1) = \frac{2}{5}$

$$P(A_2) = P(A_2S) = P(A_2 \cap (A_1 \cup \overline{A}_1))$$

$$= P(A_1A_2 \cup \overline{A}_1 A_2) = P(A_1A_2) + P(\overline{A}_1 A_2)$$

$$= P(A_1)P(A_2 \setminus A_1) + P(\overline{A}_1)P(A_2 \setminus A_1)$$

$$= \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{2}{5}$$

$$P(A_3) = P(A_3S) = P(A_3(A_1\overline{A}_2 \cup \overline{A}_1 A_2 \cup \overline{A}_1\overline{A}_2))$$

$$= P(A_1\overline{A}_2A_3) + P(\overline{A}_1A_2A_3) + P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)$$

$$= P(A_1)P(\overline{A}_2 \setminus A_1)P(A_3 \setminus A_1\overline{A}_2) + P(\overline{A}_1)P(A_2 \setminus \overline{A}_1)P(A_3 \setminus \overline{A}_1A_2) + P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2 \setminus \overline{A}_1)P(A_3 \setminus \overline{A}_1\overline{A}_2)$$

$$= \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{5}$$

按类似的方法，借助于条件概率可以很方便的计算出

$P(A_4)$=$P(A_5) = \frac{2}{5}$.

由以上可见，五人依次抓取的概率

$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = P(A_4)$=$P(A_5) = \frac{2}{5}$所以抓阄与先后次序无关。

3 结论

条件概率是概率论中一个重要并且非常有用的基本概念，针对初学者不会灵活运用这一公式所存在的问题，文中从概率公理化定义出发，推导了条件概率的定义公式，希望学生能够真正掌握条件概率的本质含义，进而能灵活运用条件概率计算复杂事件的概率及解决相关问题。

参考文献：

[1] 李杰民,廖运章.条件概率的本质及其教学建议[J].数学教育学报,2021,Vol.30(No.1):54-60.

[2] 史蒂文.J.米勒(美)著,李馨译.普林斯顿概率论读本[M].北京:人民邮电出版社.2020.

[3] 茆诗松,程依明,濮晓龙.概率论与数理统计教程[M].北京:高等教育出版社.2020.